等分多項式の行列式表示の種数２への拡張

大 西 良 博 (Yoshihiro Ônishi)

岩手大学人文社会科学部

$\boxed{\mathbf{1}}$ 種数２での Frobenius-Stickelberger の公式．いま u_0，u_1，$\cdots$，u_n が方程式 $y^2=f(x)$（ただし $f(x)$ は 5 次式とする）により与へられた種数２の非特異超楕円曲線 C の Jacobi 多様体の中の像，則ち theta 因子上にあるものとし，それらの x，y 座標を $x(u_0)$，$y(u_0)$，$x(u_1)$，$y(u_1)$，$\cdots$ などと表すことにする．このとき Frobenius-Stickelberger の公式（[W-W] の p.458，Exercise 21）の一般化は

$$
-\frac{\sigma(u_0+u_1+\cdots+u_n)\prod_{i<j}\sigma(u_i-u_j)}{\sigma_2(u_0)^{n+1}\cdots\sigma_2(u_n)^{n+1}}
=\begin{vmatrix}
1 & x(u_0) & x^2(u_0) & y(u_0) & x^3(u_0) & yx(u_0) & x^4(u_0) & yx^2(u_0) & \cdots\\
1 & x(u_1) & x^2(u_1) & y(u_1) & x^3(u_1) & yx(u_1) & x^4(u_1) & yx^2(u_1) & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\\
1 & x(u_n) & x^2(u_n) & y(u_n) & x^3(u_n) & yx(u_n) & x^4(u_n) & yx^2(u_n) & \cdots
\end{vmatrix}
$$

となる．行列のサイズは $(n+1)\times(n+1)$ である．函数 $\sigma(u)=\sigma(u^{(1)},u^{(2)})$ は楕円 sigma 函数を超楕円函数の場合へ一般化した函数である（H.F. Baker らによるもの，[Ô] 参照）．また $\sigma_2(u)=\dfrac{\partial}{\partial u^{(2)}}\sigma(u)$ である．ここで右辺の第１行の $u_0=0$ における極の位数は左から順に

$$0,\quad 2,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad \cdots$$

となつてゐる．第２行以下も同様である．はじめの幾つかが不規則であるのは Weierstrass gaps と対応してゐる．それでも左辺と一致してゐるのは不思議だ．とくに $n=1$ のときは例の公式（[W-W] の p.451，Example 1）と一致してゐる．証明は，基本的には，極と零点を比較して，帰納法による．その際に u が C の Jacobi 多様体への埋め込みの像，の上にあるとき函数 $\sigma_2(u)$ は $u=0$ のみに２位の極を持ち，それ以外では正則であることなどを使ふ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 種数２での函数 ψ_n の行列式表示．先の公式に極限操作を施せば，Weber の函数 $\psi_n(u)$ の行列表示（[W-W]，p.460，Exercise 33）は種数２の場合

$$(1!2!\cdots n!)\cdot\psi_n(u)=(1!2!\cdots n!)\frac{\sigma(nu)}{\sigma_2(u)^{n^2}}$$

$$=x^{n(n-1)/2}(u)\times\begin{vmatrix} x'(u) & (x^2)'(u) & y'(u) & (x^3)'(u) & (yx)'(u) & \cdots \\ x''(u) & (x^2)''(u) & y''(u) & (x^3)''(u) & (yx)''(u) & \cdots \\ x'''(u) & (x^2)'''(u) & y'''(u) & (x^3)'''(u) & (yx)'''(u) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ x^{(n-1)}(u) & (x^2)^{(n-1)}(u) & y^{(n-1)}(u) & (x^3)^{(n-1)}(u) & (yx)^{(n-1)}(u) & \cdots \end{vmatrix}$$

と一般化される．ここでダッシュは　C の Jacobi 多様体への埋め込みの像の上の変数 u を $u=(u^{(1)},u^{(2)})$ と表示したときの第２成分 $u^{(2)}$ による<u>常微分</u>の繰り返しを表してゐる．函数 $\psi_n(u)$ は n 倍すると theta 因子上にくるやうな，もとの曲線の埋め込み像上の点を丁度その零点として持つ代数函数である．

文献

[Ô] Y.Ônishi, *Complex multiplication formulae for hyperelliptic curves of genus three*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 381–431.

[W-W] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A course of modern analysis*, (Cambridge Univ. Press, 1902).