実二次体における基本単数の係数についての考察

安江 健

名城大学大学院理工学研究科 M2

$p \equiv 1 \bmod 4$: 素数
$F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$: 実二次体
$\mathfrak{o}_F =$ F の代数的整数全体のなす環 (F の整数環)
$\mathfrak{o}_F^\times =$ $\mathfrak{o}_F$ の可逆元全体 (F の単数群)
$= \{ \pm \varepsilon_p^n \mid n \in \mathbb{Z} \}, \ \varepsilon_p > 1$

AAC 予想 (Ankeny-Artin-Chowla conjecture)

$$\varepsilon_p = \frac{t_p + u_p\sqrt{p}}{2} > 1 \quad t_p, \ u_p \in \mathbb{Z}$$

とするとき $p \nmid u_p$.

$p \mid u_p \ \Leftrightarrow \ \{\frac{u_p}{p}\} = 0$ と解釈する.
$\Rightarrow \ \{\frac{u_p}{p}\}$ の分布を調べる.

$\{x\} := x - [x]$ ：x の小数部分

$\omega := (x_n)$ ：実数列

$I := [0,\, 1), E \subseteq I, N \in \mathbb{N}$

$A(E;\, N;\, \omega) := \#\{\, x_n \mid n \leq N,\ \{x_n\} \in E \,\}$

定義 1 (mod 1 での一様分布)

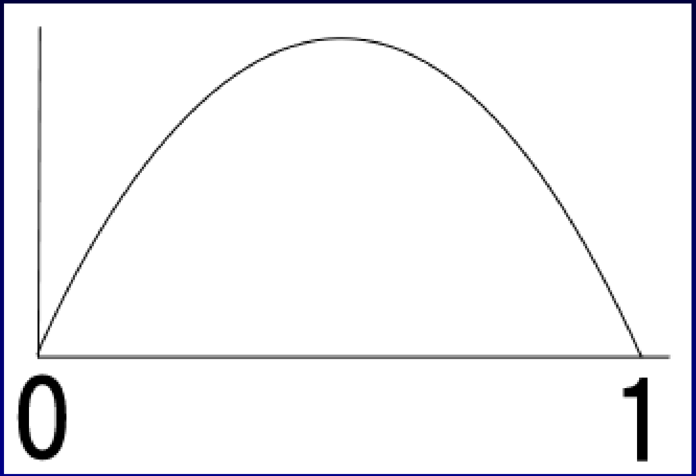
$\omega = (x_n)$ が mod 1 で一様に分布する $\Leftrightarrow {}^{\forall}a,\, b \in \mathbb{R}$ の対で $0 \leq a < b \leq 1$ を満たすものについて

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a,\, b];\, N;\, \omega)}{N} = b - a$$

となる.

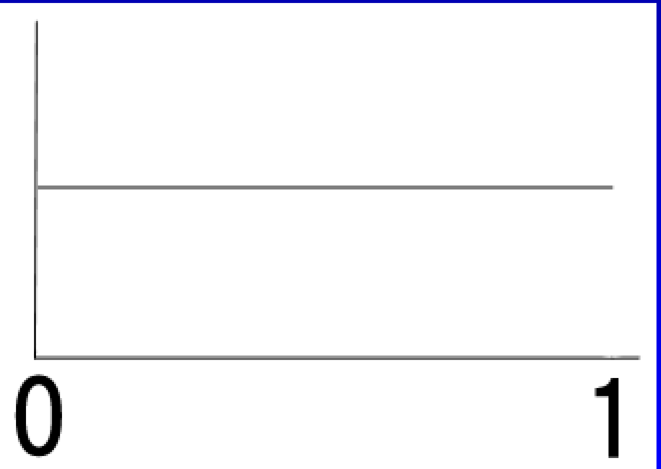
$\{\frac{u_p}{p}\}$ の分布.

もし，$\{\frac{u_p}{p}\}$ の分布が



のようになっていれば，この分布はAAC予想を支持すると言える.

$\Rightarrow$ しかし実際に計算機を走らせると：

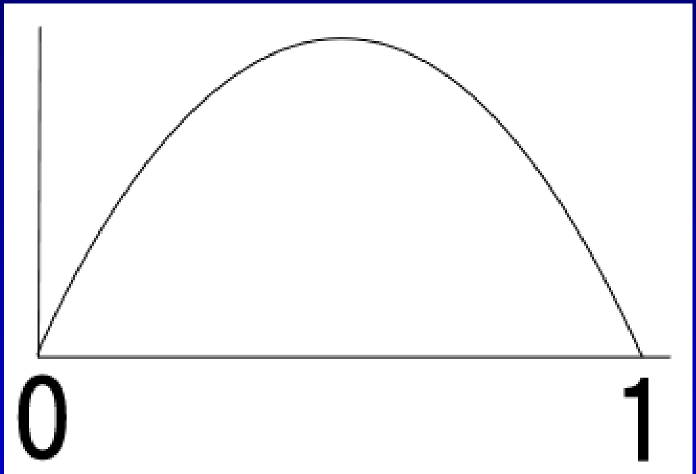


$\{\frac{u_p}{p}\}$ の分布.

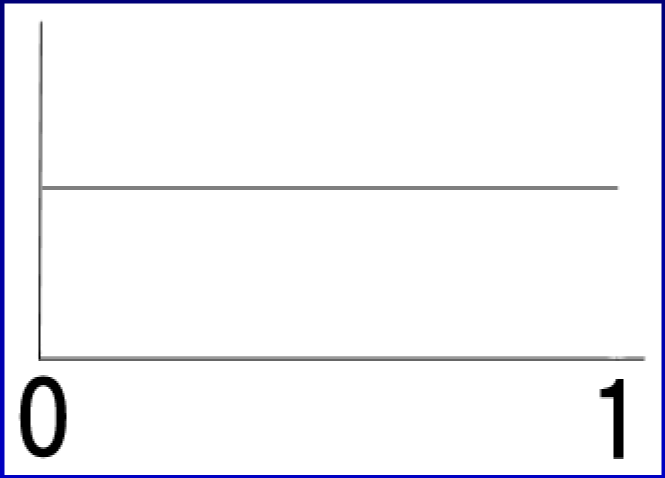
予想 1

$\{\frac{u_p}{p}\}$ は mod 1 で一様に分布する.

つまり,



ではなく



のように分布しているのであろう.

$$I(x;\ k,\ N) := \{\ p \leq x \mid \{\tfrac{u_p}{p}\} \in [\tfrac{k}{N},\ \tfrac{k+1}{N})\ \}$$

$$d(x;\ k,\ N) := \frac{\#I(x;\ k,\ N)}{\pi(x;\ 4,\ 1)} - \frac{1}{N}$$

$[0, \dfrac{1}{N})$ と他の区間 $[\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N})$ との割合の最大値

$$\max_{1 \leq k \leq N-1} \left| \frac{d(x;\ k,\ N)}{d(x;\ 0,\ N)} \right| \ (N = 10^i)$$

をみてみる.

$$I(x;\, k,\, N) := \{\, p \le x \mid \{\tfrac{u_p}{p}\} \in [\tfrac{k}{N},\, \tfrac{k+1}{N})\,\}$$

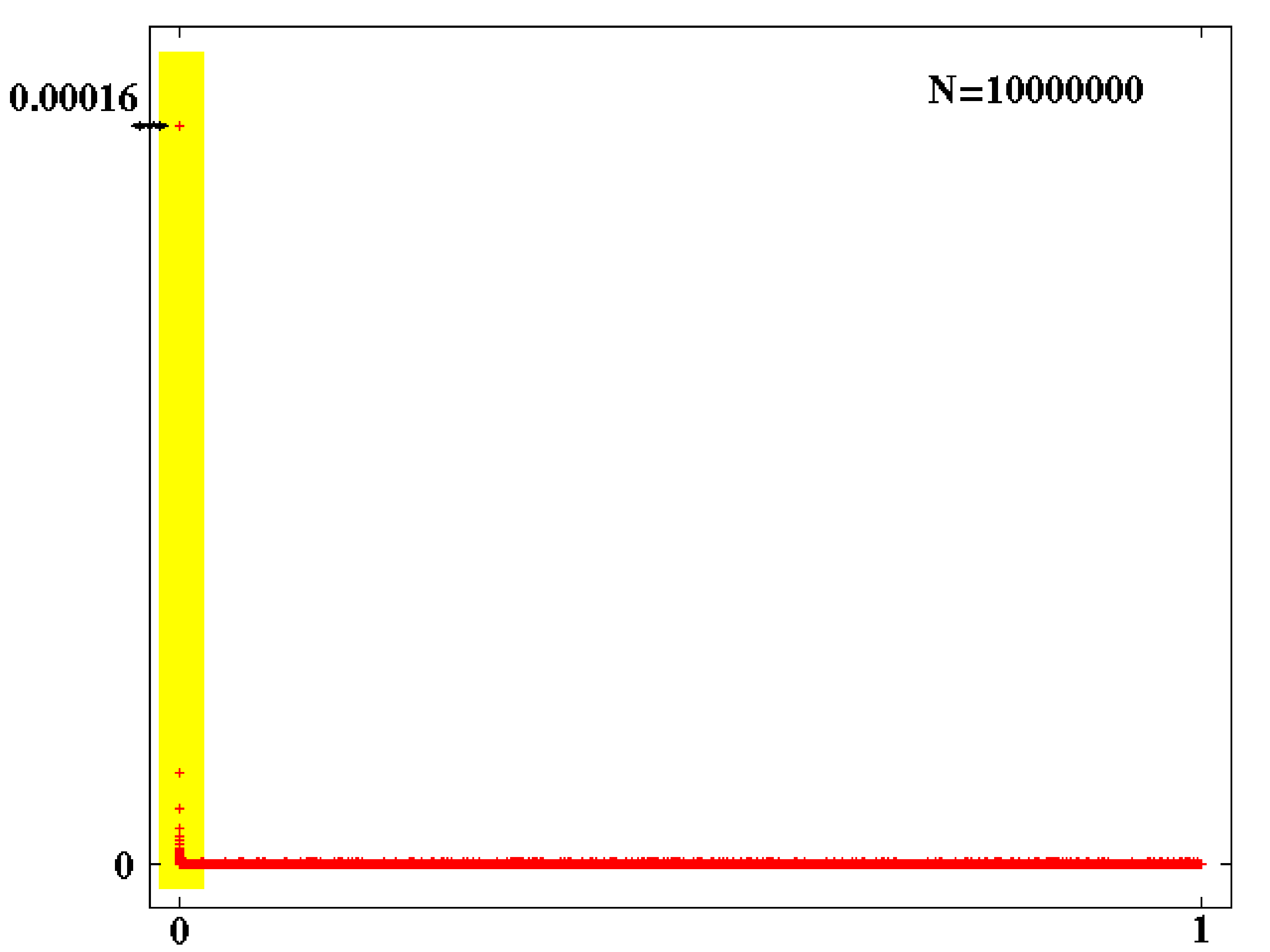
$$d(x;\, k,\, N) := \frac{\#I(x;\, k,\, N)}{\pi(x;\, 4,\, 1)} - \frac{1}{N}$$

Table 1: $\displaystyle \max_{1\le k\le N-1} \left| \frac{d(x;\, k,\, N)}{d(x;\, 0,\, N)} \right| \quad (N = 10^i)$

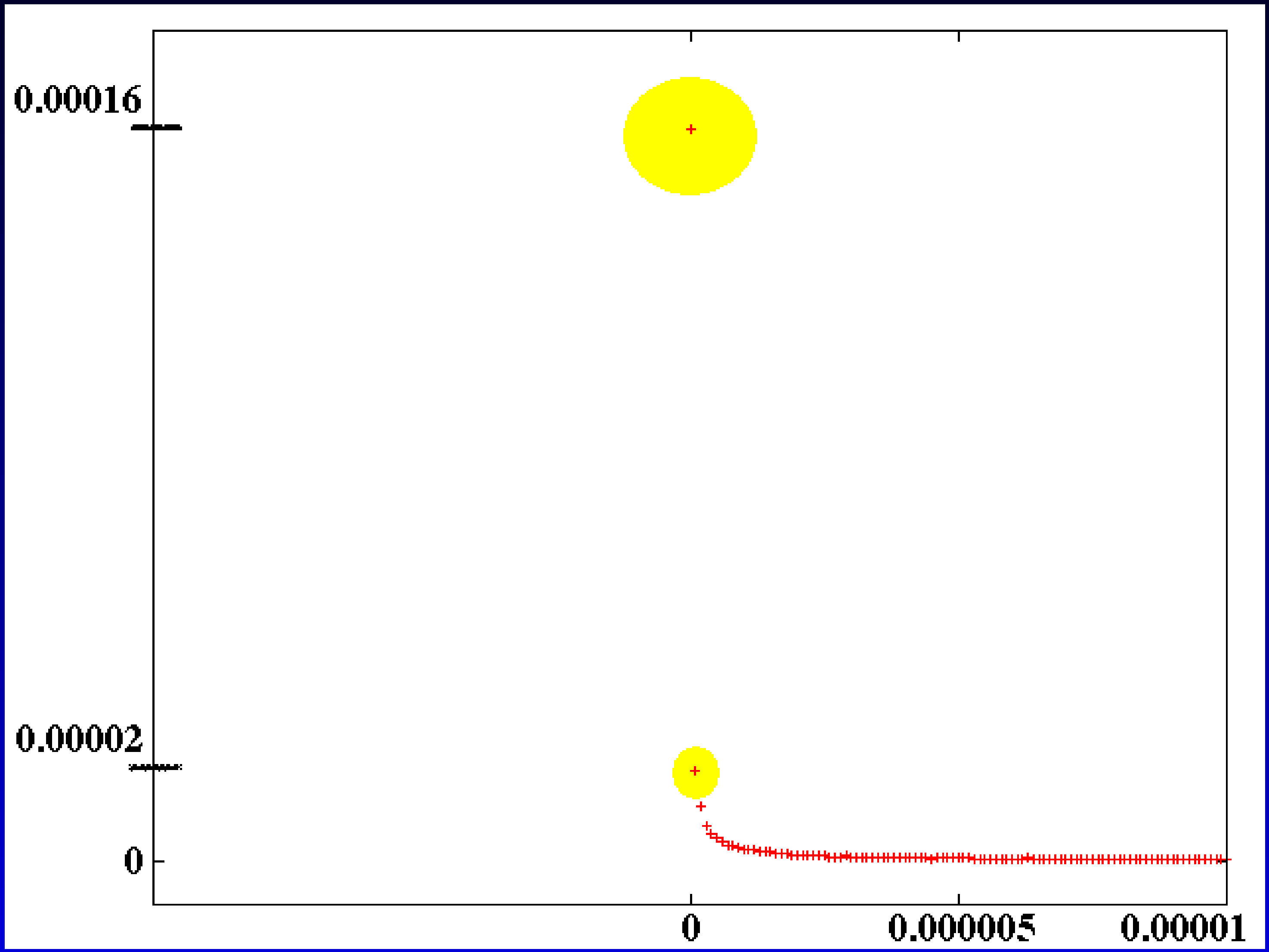
$\pi(x;\, 4,\, 1)$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$1.2 \cdot 10^8$	0.19662	0.04602	0.05429	0.05535

$\Rightarrow [0, \dfrac{1}{N})$ に誤差がすべてある.

$[0,1)$ 区間を 10^7 等分したときの誤差の分布：



$[0,1)$ 区間を 10^7 等分したときの誤差の分布：



定義 2 $\mathbb{P}$ を

$$\mathbb{P} := \{p \,|\, p \equiv 1 \bmod 4\}$$

とし，$A \subset B \subset \mathbb{P}$ とする．このとき

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#\{p \in A \,|\, p \leq x\}}{\#\{p \in B \,|\, p \leq x\}}$$

が存在するときその値を $D(A, B)$ と書いて A の B に関する密度と呼ぶことにする．

命題 1 t_p, u_p について以下が成り立つ.

$$u_p \equiv 1 \bmod 2 \iff t_p \equiv 1 \bmod 2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u_p \equiv 1 \bmod 4 \\ p \equiv 5 \bmod 8 \end{cases}$$

$$u_p \equiv 0 \bmod 2 \iff t_p \equiv 0 \bmod 2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u_p \equiv 2 \quad \bmod 8 \\ t_p \equiv p-1 \bmod 8 \end{cases}$$

u_p が奇数 $(u_p \equiv 1 \bmod 4)$ のとき：

予想 2

$$\mathbb{P}_1 := \{p \in \mathbb{P} \,|\, u_p \equiv 1 \bmod 4\}$$

とし，$l \geq 2$ および $j \equiv 1 \bmod 4$ について

$$S_l(j) := \{p \in \mathbb{P}_1 \,|\, u_p \equiv j \bmod 2^l\}$$

と定めるとき $S_l(j)$ の $\mathbb{P}_1$ に関する密度 $D(S_l(j), \mathbb{P}_1)$ が存在し，それは j によらず一定である．

u_p が偶数 ($u_p \equiv 2 \pmod 8$) のとき：

予想 3

$$\mathbb{P}_2 := \{p \in \mathbb{P} \,|\, u_p \equiv 2 \bmod 8\}$$

とし，$l \geq 4$ のとき

$$A_l(j) := \{p \in \mathbb{P}_2 \,|\, u_p \equiv 2 + 8j \bmod 2^l\}$$

とおくと $A_l(j)$ の $\mathbb{P}_2$ に関する密度 $D(A_l(j), \mathbb{P}_2)$ が存在し，それは j によらず一定である．

$p \equiv 1 \pmod 8$ のときは $u_p \equiv 2 \pmod 8$.
$p \equiv 5 \pmod 8$ のときは $u_p \equiv 1, 2, 5 \pmod 8$.

$\Rightarrow$ 各々の密度は？

$$\mathbb{P}(5) := \{p \in \mathbb{P} \,|\, p \equiv 5 \bmod 8\}$$
$$U(j) := \{p \in \mathbb{P}(5) \mid u_p \equiv j \bmod 8\}$$

とおく.

予想 4

$$j = 1, 2, 5 \text{ について } D(U(j), \mathbb{P}(5)) = \frac{1}{3}.$$