小数部分の小さい等比数列を与えるアルゴリズム

金子　元
京都大学理学研究科

1. 研究目的

2. TijdemanとDubickasの結果

3. Tijdemanのアルゴリズム

4. 主結果

5. 数値例

6. 主結果の証明

1. 研究目的

Theorem 1 (Koksma)**.**
1より大きい任意の公比αが与えられたとする。
このときほとんどすべての実数ξに対して、
等比数列$\xi\alpha^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$の小数部分は一様分布する。

今回の発表ではKoksmaの定理の例外集合について調べる。
特に公比αが任意に与えられた時、

$$\limsup_{n\to\infty}\{\xi\alpha^n\}$$

が小さいような0でない初項ξを構成することを目標とする。

2. TijdemanとDubickasの結果

Theorem 2 (Tijdeman)**.**
2より大きい任意の公比αが与えられた時、
0でない初項$\xi = \xi(\alpha)$が存在して以下を満たす。

$$\limsup_{n\to\infty}\{\xi\alpha^n\} \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Theorem 3 (Dubickas)**.**
公比αは$1 < \alpha < 2.025\ldots$を満たすとする。このとき、0でない初項$\xi = \xi(\alpha)$が存在して以下を満たす。

$$\limsup_{n\to\infty}\{\xi\alpha^n\} \leq 1 - \frac{2(\alpha-1)^2}{9(2\alpha-1)^2}.$$

3.Tijdemanのアルゴリズム

数列u_n $(n = 0, 1, \ldots)$を以下のように定める。

$$\begin{aligned} u_0 = & \ 1 \quad , \\ u_{n+1} &= \lceil \alpha u_n \rceil \\ &= \min(x \in \mathbb{Z} | x \geq \alpha u_n). \end{aligned}$$

u_n/α^nは収束する。(その値をξとする。)

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha u_n < 1.$$

$$0 \geq \frac{u_n}{\alpha^n} - \frac{u_{n+1}}{\alpha^{n+1}} > -\frac{1}{\alpha^{n+1}}.$$

このξがTijdemanの定理の結論を満たすことを示す。

$0 \leq n < m$に対して、

$$\begin{aligned} 0 \geq \frac{u_n}{\alpha^n} - \frac{u_m}{\alpha^m} &> -\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{\alpha^i} \\ &> -\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} = -\frac{1}{\alpha^n(\alpha - 1)}. \end{aligned}$$

$m \to \infty$として、

$$0 \geq \frac{u_n}{\alpha^n} - \xi \geq -\frac{1}{\alpha^n(\alpha - 1)}.$$

以上により

$$0 \leq \xi\alpha^n - u_n \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$

$u_n \in \mathbb{Z}$より、定理が示された。$\square$

4. 主結果

今回の講演の目標は、公比αが代数的数の時にTijdeman,Dubickasの結果を改良することである。簡単のためにαの共役は1より小さい正数の場合について発表する。

Theorem 4. αを1より大きい代数的数として、その共役は1より小さい正数と仮定する。また、αの最小多項式を$P_\alpha(X) = a_d X^d + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ $(a_d > 0)$とする。0でない初項$\xi = \xi(\alpha)$が存在して以下を満たす。

$$\limsup_{n\to\infty}\{\xi\alpha^n\} \le \frac{-1 + a_d}{|P_\alpha(1)|}.$$

5. 数値例

αを$2X^2-50X+1=0$の1より大きい唯一の解とする。定理2によると、0ではないξが存在して

$$\limsup_{n\to\infty}\{\xi\alpha^n\}\le\frac{1}{\alpha-1}=0.04170\ldots$$

となる。定理4を用いると、0ではないξで

$$\limsup_{n\to\infty}\{\xi\alpha^n\}\le\frac{1}{47}=0.02127\ldots.$$

を満たすものが存在することが分かる。

他方、任意の0ではない実数ξに対して

$$\limsup_{n\to\infty}\{\xi\alpha^n\}\ge 0.02003\ldots$$

を示すことができる。

6. 主結果の証明

αの共役を$\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{d-1}$と書く。
数列$(u_m)_{m=-\infty}^{\infty}$および$(y_m)_{m=-\infty}^{\infty}$を以下により定義する。

- $m < 0$の場合、$u_m = y_m = 0$.
- $u_0 = R,\ y_0 = a_d R$. ただし、Rは十分大きい自然数。
- $m \geq 1$の場合、

$$\begin{aligned} u_m &= -\left[\frac{a_{d-1}u_{m-1} + \cdots + a_0 u_{m-d}}{a_d}\right], \\ y_m &= a_d \left\{\frac{a_{d-1}u_{m-1} + \cdots + a_0 u_{m-d}}{a_d}\right\}. \end{aligned}$$

y_mは整数なので$0 \leq y_m \leq -1 + a_d$である。以下u_n/α^nは収束し、その収束先が定理の条件を満たすことを証明する。

ここで、以下の有理関数を導入する。

$$\rho_m(X_1,\ldots,X_{d-1}) = \sum_{i=1}^{d-1} \left(\prod_{\substack{1\le j\le d-1\\ j\neq i}} \frac{1}{X_i - X_j} \right) X_i^{m+d-2}.$$

関係式

$$y_m = a_d u_m + a_{d-1} u_{m-1} + \cdots + a_0 u_{m-d}$$

を反転することで、

$$u_n = \frac{1}{a_d} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i \rho_j(\beta_1,\ldots,\beta_{d-1}) y_{-i-j+n}$$

が得られる。ゆえに、

$$\frac{u_n}{\alpha^n} = \frac{1}{a_d} \sum_{i=-n}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i \rho_j(\beta_1,\ldots,\beta_{d-1}) y_{-i-j}$$

は

$$\xi = \frac{1}{a_d} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i \rho_j(\beta_1,\ldots,\beta_{d-1}) y_{-i-j}$$

に収束する。

$$u_n = \frac{1}{a_d} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i \rho_j(\beta_1, \ldots, \beta_{d-1}) y_{-i-j+n}$$

$$\xi\alpha^n = \frac{1}{a_d} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i \rho_j(\beta_1, \ldots, \beta_{d-1}) y_{-i-j+n}$$

$$\xi\alpha^n - u_n = \frac{1}{a_d} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i \rho_j(\beta_1, \ldots, \beta_{d-1}) y_{-i-j+n}$$

$0 \leq y_m \leq -1 + a_d$を用いることで定理の不等式を示すことができる。□