題名

Computational Method and Weber's Class Number Problem

[1,*] 岡崎龍太郎

1) 同志社大学理工学部数理システム学科

[1] Ryotaro Okazaki

1) Department of Mathematical Sciences, Faculty of Engineering, Doshisha University

*Email: rokazaki@dd.iij4u.or.jp

キーワード: 類数, Weber 問題, 代数的単数, ハイト

Keywords: Class number, Weber problem, algebraic unit, height

1. 概要

$n \in \mathbf{N}$ について, $V_n = \mathbf{Q}(\cos(2\pi/2^{n+2}))$ という体を考えます. $V_0 = \mathbf{Q}$, $V_1 = \mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, $V_2 = \mathbf{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$, $V_3 = \mathbf{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right), \ldots$. 講演者は V_n を n 番目の Vieta 体と呼ぶことを提案します.

V_n の整数環 O_n は $\mathbf{Z}[2\cos(2\pi/2^{n+2})]$ です. Weber 氏は O_1, O_2, O_3 が PID (単項イデアル整域) だということを示しました. そして, $n \geq 4$ についても O_n が常に PID になっているだろうかという問題を提出しました. 後に, Bauer 氏と Masley 氏が O_4 の PID であることを示し, Linden 氏が O_5 の PID であることを示しました.

V_n の類数 h_n は O_n の PID からの遠さを測る尺度で, h_n が消える (即ち, $h_n = 1$) ことが O_n の PID であることを表します.

類数の計算はある種の壁にぶつかっていたのですが, Washington 氏が任意に与えられた素数 l による h_n ($n \to \infty$) の整除性を調べるための定性的な方法を見つけています.

最近, 堀江邦明氏が Weber の問題に肯定的な解答をあたえるプロジェクトを始めました. 同氏が突破口を開いた後, 小松啓一氏, , 福田隆氏, 堀江邦明氏, 堀江充子氏が顕著な貢献をしています.

その結果, 素数の内のある割合のものが h_n ($n \geq 1$) の全てと素だということが分かりました.

2008 年の北陸数論研究集会の際に, 小松啓一氏が講演者をこの問題に紹介してくれました.

その後, 講演者は計算機数論の方法により鮮やかな結果を導くことができることを発見しました. 数の幾何を通して, ガロワ群の部分群の群環と単数の大きさの下界を結びつける方法です.

森澤貴之氏がこの方法を $p = 3, 5, \ldots$ についての $\mathbf{Q}$ の $\mathbf{Z}_p$ の場合に一般化しています.

この講演の目的は, 単数の大きさの下界の Weber 問題への応用の仕方を説明することです.

2. Overview

Let $V_n = \mathbf{Q}(\cos(2\pi/2^{n+2}))$ for $n \in \mathbf{N}$ so that $V_0 = \mathbf{Q}$, $V_1 = \mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, $V_2 = \mathbf{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$, $V_3 = \mathbf{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right), \ldots$.

The speaker proposes to call V_n the n-th Viète field.

The ring O_n of integers of V_n is $\mathbf{Z}[2\cos(2\pi/2^{n+2})]$. Weber showed O_n is a PID (principal ideal domain) for $n = 1$, 2 and 3. Then, he asked if O_n is always a PID. Later, Bauer and Masley showed O_4 is also a PID. and Linden showed O_5 is also a PID.

The class number h_n of V_n measures how far is O_n from being PID. It vanishes (i.e., $h_n = 1$) if O_n is a PID.

Although computation of h_n has reached a certain wall, Washington found a qualitative method for divisibility of h_n ($n \to \infty$) by an arbitrary given prime number l.

Recently K.Horie initiated a project for giving an affirmative answer to Weber's problem. After he made a break-through, K.Horie, M.Horie, Fukuda, and Komatsu made significant contribution.

They proved a certain explicit proporition of prime numbers are coprime with every h_n ($n \geq 1$).

At the time of Hokuriku Conference on Number Theory in 2008, Professor Komatsu invited the speaker to this problem.

The speaker found a certain method from computational number theory gives impressive results. He combines lower bounds on units and the method of group ring via geometry of numbers This approach is now generalized to $\mathbf{Z}_p$ extensions with $p = 3, 5, \ldots$ by Morisawa.

The purpose of this talk is to explain how lower bounds on units are applied in Weber's problem.