基本単数を根に持つ3次巡回多項式の族について

岸 康弘 (Yasuhiro Kishi)[1]

東京都立大学理学研究科 学振特別研究員 (PD)

E-mail: ykishi@comp.metro-u.ac.jp

序

D. Shanks [14] と L. C. Washington [17] はそれぞれワンパラメータを持つ 3 次巡回多項式を与えた. (特に, Shanks が与えた多項式の分解体は "the simplest cubic field" と呼ばれ, 非常に多くの研究が為されている. 例えば, E. Thomas [15, Section 3, Example], M. Watabe [18], T. W. Cusick [4, Section 3], L. C. Washington [16], E. Lehmer [6, Section 3], R. Schoof and L. C. Washington [12, Appendix], P. Morton [11], F. Lemmermeyer and A. Pethő [7], R. J. Chapman [3], D. Byeon [1], [2] など.) それらの多項式は, ある条件の下で基本単数を根に持つことが示されている. この論文では, 基本単数を根に持つ新しいタイプの 3 次巡回多項式の族を与える.

次の 3 次多項式を考える:

$$f_n(X) := X^3 - n(n^2+n+3)(n^2+2)X^2 - (n^3+2n^2+3n+3)X - 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

この多項式はすべての $n \in \mathbb{Z}$ について $\mathbb{Q}$ 上既約である. 実際, n についての方程式 $f_n(\pm 1) = 0$ は $\mathbb{Q}$ に根を持たない. また, 判別式 $d(f_n)$ は

$$d(f_n) = (n^2+1)^2(n^2+3)^2(n^4+n^3+4n^2+3)^2$$

であり, $\mathbb{Z}[n]$ で平方数となる. 従って, $f_n(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体 K_n は $\mathbb{Q}$ 上 3 次の巡回体である.

この K_n に対して次の結果を得た.

定理 1. 整数 b を $(n^2+3)(n^4+n^3+4n^2+3)$ の *cube-free part* とする. このとき, 体 K_n の判別式 $D(K_n)$ は

$$D(K_n) = (3^{\delta} \prod_{\substack{p \mid b \\ p \geq 7}} p)^2, \qquad \delta = \begin{cases} 0, & \textit{if } \ n \equiv 2 \pmod 3 \ \textit{ or } \ n \equiv 16 \pmod{27}, \\ 2, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

と表される.

定理 2. 多項式 $f_n(X)$ の 2 つの根を $\theta,\ \theta'$ とする. このとき $\{\theta,\ \theta'\}$ は整環 $\mathbb{Z}[\theta,\ \theta']$ の基本単数系となる. また, E で K_n の単数群を表し,

$$N := \frac{(n^2+3)(n^4+n^3+4n^2+3)}{4^{\delta_1} \cdot 9^{\delta_2}}$$

[1]This author was supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

とおく. 但し

$$\delta_1 = \begin{cases} 0, & if\ \ n \text{ は偶数}, \\ 1, & if\ \ n \text{ は奇数}, \end{cases} \qquad \delta_2 = \begin{cases} 0, & if\ \ n \equiv 2 \pmod 3, \\ 1, & if\ \ n \not\equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

もし N が平方因子を持たないならば, 群指数 $[E : \langle -1,\ \theta,\ \theta' \rangle]$ は

$$[E : \langle -1,\ \theta,\ \theta' \rangle] = \begin{cases} 7, & if\ \ n = \pm 1, \\ 3, & if\ \ n = -2, \\ 1, & otherwise \end{cases}$$

となる. (従って, N が平方因子を持たず, かつ $n \neq \pm 1,\ -2$ ならば $\{\theta,\ \theta'\}$ は体 K_n の基本単数系となる.)

定理 3. 体 K_n の類数を $h(K_n)$ で表す. また N が平方因子を持たないと仮定する. このとき, $h(K_n) < 10^4$ を満たす n は次の 32 個のみである :

$$n \in \left\{ \begin{array}{cccccccc} -19, & -15, & -14, & -13, & -11, & -10, & -9, & -8, \\ -7, & -6, & -5, & -4, & -3, & -2, & -1, & 0, \\ 1, & 2, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\ 10, & 11, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 19 \end{array} \right\}.$$

第 1 節から第 3 節でこれらの定理を証明する. 第 4 節では, 我々の多項式 $f_n(X)$ の出所, また Shanks, Washington の与えた多項式との関係について述べる. 最後の節では, GP/PARI (Version 2.1.0) で計算した K_n ($|n| \leq 120$) の導手と類数を表に載せる.

1. 定理 1 の証明

定理 1 を証明する前に, 次の結果を紹介する. 素数 p と整数 m に対し, m を割る p の最大冪を $v_p(m)$ で表すことにする.

命題 1.1 (P. Llorente and E. Nart [9])**.** 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上既約な 3 次多項式

$$F(X) = X^3 - aX - b, \qquad a,\ b \in \mathbb{Z}$$

の根を θ とする. また p を素数とし, 次の条件を満たすものと仮定する:

$$v_p(a) < 2 \text{ または } v_p(b) < 3 \text{ のどちらか一方が成り立つ.} \tag{1.1}$$

このとき, 次が成り立つ.
(1) $p \neq 3$ のとき, p が $\mathbb{Q}(\theta)$ で完全分岐するための必要十分条件は

$$1 \leq v_p(b) \leq v_p(a)$$

が成り立つことである.
(2) $p = 3$ のとき, 3 が $\mathbb{Q}(\theta)$ で完全分岐するための必要十分条件は, 次の 3 つの条件のいずれかが成り立つことである:

(i) $1 \leq v_3(b) \leq v_3(a)$;
(ii) $3 \mid a,\ a \not\equiv 3 \pmod 9,\ 3 \nmid b,\ and\ b^2 \not\equiv a + 1 \pmod 9$;
(iii) $a \equiv 3 \pmod 9,\ 3 \nmid b,\ and\ b^2 \not\equiv a + 1 \pmod{27}$.

この命題を適用するために, $X = (Y + n(n^2+n+3)(n^2+2))/3$ を $f_n(X)$ に代入し 3^3 倍すると

$$g_n(Y) := Y^3 - \alpha Y - \beta$$

を得る. 但し

$$\begin{aligned}
\alpha &:= 3ABC,\\
\beta &:= ABD,\\
A &:= n^2+3,\\
B &:= n^4+n^3+4n^2+3,\\
C &:= n^4+n^3+3n^2+n+1,\\
D &:= 2n^9+4n^8+18n^7+22n^6+50n^5+36n^4+50n^3+19n^2+18n+3.
\end{aligned}$$

これら $\alpha,\ \beta,\ A,\ B,\ C,\ D$ の 3 の付値に関して, 次が成り立つ.

補題 1.2. 記号は上と同じとする. このとき

$$v_3(A) = \begin{cases} 0, & \textit{if } n \equiv 1,\ 2 \pmod 3,\\ 1, & \textit{if } n \equiv 0 \pmod 3; \end{cases}$$

$$v_3(B) = \begin{cases} 0, & \textit{if } n \equiv 2 \pmod 3,\\ 1, & \textit{if } n \equiv 0 \pmod 3,\\ 2, & \textit{if } n \equiv 1,\ 4 \pmod 9,\\ 3, & \textit{if } n \equiv 7 \pmod 9; \end{cases}$$

$$v_3(C) = \begin{cases} 0, & \textit{if } n \equiv 0,\ 1 \pmod 3,\\ 1, & \textit{if } n \equiv 2 \pmod 3; \end{cases}$$

$$v_3(D) \begin{cases} = 0, & \textit{if } n \equiv 0 \pmod 3 \quad \textit{or} \quad n \equiv 1,\ 4 \pmod 9,\\ = 2, & \textit{if } n \equiv 7,\ 25 \pmod{27},\\ = 3, & \textit{if } n \equiv 2 \pmod 3,\\ \geq 3, & \textit{if } n \equiv 16 \pmod{27}. \end{cases}$$

従って,

$$v_3(\alpha) = \begin{cases} 2, & \textit{if } n \equiv 2 \pmod 3,\\ 3, & \textit{if } n \equiv 0 \pmod 3 \quad \textit{or} \quad n \equiv 1,\ 4 \pmod 9,\\ 4, & \textit{if } n \equiv 7 \pmod 9; \end{cases}$$

$$v_3(\beta) \begin{cases} = 3, & \textit{if } n \equiv 0,\ 2 \pmod 3,\\ = 5, & \textit{if } n \equiv 7,\ 25 \pmod{27},\\ \geq 6, & \textit{if } n \equiv 16 \pmod{27} \end{cases}$$

が成り立つ.

Proof. 直接計算することによりわかる. □

補題 1.3. すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\gcd(A,B) \mid 3, \quad \gcd(A,D) \mid 6, \quad \gcd(B,D) \mid 3^3, \quad \gcd(C,D) \mid 3$$

が成り立つ.

Proof. ユークリッドの互除法と補題 1.2 により得られる. □

次に, どのような素数が体 K_n で分岐しているのかを調べる. まず初めに, p を 3 とは異なる素数とする. そこで, AB を次のように表す:

$$AB = (n^2+3)(n^4+n^3+4n^2+3) = bc^3, \quad b,\ c \in \mathbb{Z}, \quad b : \text{立方因子を持たない.}$$

このとき

$$\frac{1}{c^3} g_n(cZ) = Z^3 - 3bcCZ - bD \in \mathbb{Z}[Z] \tag{1.2}$$

である. 命題 1.1 より, もし p が K_n で分岐するならば, p は $3bcC$ と bD を両方割らなければならない. しかし補題 1.3 により, $p \nmid \gcd(3bcC, D)$ であるので, p が K_n で分岐するためには, b を割らなければならない. 逆に, $p \mid b$ ならば, $\gcd(A, D) \mid 6$ であることから

$$v_p(bD) < 3 \quad \text{かつ} \quad 1 \leq v_p(bD) \leq v_p(3bcC)$$

が成り立つ. よって, 多項式 (1.2) に対し, 素数 p は命題 1.1 の仮定 (1.1) を満たし, かつ条件 (1) を満足する. 従って p は K_n で分岐する.

次に素数 3 の分岐の様子を見る. 補題 1.2 により, 常に $3^2 \mid \alpha,\ 3^3 \mid \beta$ が成り立つことがわかる. そこで, 次の多項式を考える:

$$\frac{1}{3^3} g_n(3Z) = Z^3 - \alpha' Z - \beta' \in \mathbb{Z}[Z], \tag{1.3}$$

但し, $\alpha' = \alpha/3^2,\ \beta' = \beta/3^3$. 再び補題 1.2 により, もし $n \not\equiv 16 \pmod{27}$ ならば $v_3(\beta') \leq 2$ となるので, 上記多項式 (1.3) に対し, 3 は命題 1.1 の仮定 (1.1) を満たす.

$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき: このとき 3 は α' を割らないので, 3 は K_n で分岐しない.

$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき: $n = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$ と表す. このとき

$$\begin{aligned} \alpha' &\equiv 3 \pmod 9, \\ \alpha' &\equiv 18k^2 + 9k + 3 \pmod{27}, \\ \beta' &\equiv 18k^2 + 18k + 1 \pmod{27}, \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \beta'^2 - (\alpha' + 1) &\equiv (18k^2+18k+1)^2 - (18k^2+9k+3+1) \\ &\equiv 3(6k^2+8) \\ &\not\equiv 0 \pmod{27}. \end{aligned}$$

よって命題 1.1 の条件 (2) の (iii) が満たされ, 従って 3 は K_n で分岐する.

$n \equiv 1,\ 4 \pmod 9$ のとき: このときも, 同様にして命題 1.1 の条件 (2) の (iii) が満たされることがわかる. 従って 3 は K_n で分岐する.

$n \equiv 7,\ 25 \pmod{27}$ のとき: このとき $v_3(\alpha') = v_3(\beta') = 2$ であるので, 補題 1.2 により命題 1.1 の条件 (2) の (i) を満たす. 従って, このときも 3 が K_n で分岐することがわかる.

$n \equiv 16 \pmod{27}$ のとき: このとき, $\alpha'/3^2$ は 3 で割れないので多項式

$$\frac{1}{3^6} g_n(3^2 Z) = Z^3 - \frac{\alpha'}{3^2} Z - \frac{\beta'}{3^4} \in \mathbb{Z}[Z]$$

は命題 1.1 の仮定 (1.1) を満たし, 条件 (2) は満たさない. 従って, 3 は K_n で分岐しないことがわかる.

以上で定理 1 が示された.

注意 **1.4.** 多項式 $f_n(X)$ の判別式 $d(f_n)$ は n^2+1 を因子に持つ. しかしながら, $\gcd(A, n^2+1) \mid 2,\ \gcd(B, n^2+1) = 1$ であることから, n^2+1 を割る素数は K_n で分岐しない.

系 **1.5.** 定理 2 において定義した整数 N が平方因子を持たないと仮定する. このとき, 判別式 $D(K_n)$ は

$$D(K_n) = (n^2+3)^2(n^4+n^3+4n^2+3)^2/e^2$$

となる. 但し

$$e = \begin{cases} 1, & \textit{if}\ \ n \equiv 0,\ 2 \pmod 6\ \ \textit{or}\ \ n \equiv 4,\ 10 \pmod{18}, \\ 3, & \textit{if}\ \ n \equiv 34,\ 52 \pmod{54}, \\ 4, & \textit{if}\ \ n \equiv 3,\ 5 \pmod 6\ \ \textit{or}\ \ n \equiv 1,\ 13 \pmod{18}, \\ 12, & \textit{if}\ \ n \equiv 7,\ 25 \pmod{54}, \\ 27, & \textit{if}\ \ n \equiv 16 \pmod{54}, \\ 108, & \textit{if}\ \ n \equiv 43 \pmod{54}. \end{cases}$$

Proof. 補題 1.2 より

$$v_3(N) = \begin{cases} 1, & \text{if}\ \ n \equiv 7 \pmod 9, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

を得る. よって, 定理 1 より

$$D(K_n) = \begin{cases} N^2, & \text{if}\ \ n \equiv 2 \pmod 3, \\ (9N)^2, & \text{if}\ \ n \equiv 0 \pmod 3\ \ \text{or}\ \ n \equiv 1,\ 4 \pmod 9, \\ (N/3)^2, & \text{if}\ \ n \equiv 16 \pmod{27}, \\ (3N)^2, & \text{if}\ \ n \equiv 7,\ 25 \pmod{27} \end{cases}$$

がわかる. 従って, N の定義から主張が得られる. □

2. 定理 2 の証明

多項式 $f_n(X)$ の 3 つの根 $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ は, $|n| \geq 2$ なる n に対して次の関係式を満たす:

$$\begin{aligned} n(n^2+n+3)(n^2+2) - 1 < \theta_1 < n(n^2+n+3)(n^2+2) + 1, \\ -\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} + \frac{5}{n^6}\right) < \theta_2 < -\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} + \frac{1}{n^6}\right), \\ -\left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5} + \frac{4}{n^6}\right) < \theta_3 < -\left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^6}\right). \end{aligned}$$

このことから, 次の不等式が直ちに得られる:

$$\begin{aligned} &-1 < \theta_3 < \theta_2 < 0 < 1 < \theta_1, \quad \text{if}\ \ n \geq 2, \\ &\theta_1 < -1 < \theta_3 < 0 < \theta_2 < 1, \quad \text{if}\ \ n \leq -2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

体 K_n の整数環を $\mathcal{O}_{K_n}$ で表す．また，多項式 $f_n(X)$ の 3 つの根のうちの 2 つを $\theta,\ \theta'$ とし，$\mathcal{O} := \mathbb{Z}[\theta,\ \theta']$ で K_n の整環を 1 つ定める．($\theta+\theta'+\theta'' \in \mathbb{Z}$ より $\mathcal{O}$ は根の選び方に依らず定まる.) さらに，$\mathcal{O}_{K_n}$ (resp. $\mathcal{O}$) の単数基準を R (resp. R') で表し，K_n の単数群 E の部分群 $E',\ E''$ をそれぞれ

$$E' := \mathcal{O}^\times,$$
$$E'' := \langle -1,\ \theta,\ \theta' \rangle,$$

で定める．(明らかに $E \supset E' \supset E''$ である.)

このとき，次が成り立つ．

補題 2.1. 群指数 $[E : E'']$ は奇数である．

Proof. $f_n(X)$ の根 θ に対し，$\theta = \xi^2$ または $-\xi^2$ となる単数 $\xi \in E$ がないことを示せば十分である．そこで，$\theta = \xi^2$ または $-\xi^2$ となる単数 $\xi \in E$ が存在したと仮定する．このとき θ の共役はすべて同符号となる．よって，$|n| \geq 2$ なるとき，これは関係式 (2.1) に矛盾する．また $|n| < 2$ なるときは，

$$\theta\theta' + \theta'\theta'' + \theta''\theta = -(n^3 + 2n^2 + 3n + 3) < 0$$

より矛盾が生ずる． □

T. W. Cusick の結果 [4] から，次の不等式を得る:

$$R' \geq \frac{1}{16} \log^2 \frac{\Delta}{4}, \tag{2.2}$$
$$R \geq \frac{1}{16} \log^2 \frac{D(K_n)}{4}, \tag{2.3}$$

但し，$\Delta := (\theta-\theta')^2(\theta'-\theta'')^2(\theta''-\theta)^2$.

まず $|n| \geq 2$ とする．$R'' := \mathrm{Reg}(\theta, \theta')$ とおくと

$$\begin{aligned} R'' &= \left| \det \begin{pmatrix} \log|\theta_1| & \log|\theta_2| \\ \log|\theta_2| & \log|\theta_3| \end{pmatrix} \right| \\ &= |\log|\theta_1| \cdot \log|\theta_3| - \log^2|\theta_2|| \\ &< |B_1(n)|, \end{aligned}$$

但し

$$B_1(n) := \begin{cases} \log|n(n^2+n+3)(n^2+2)+1| \cdot \log\left|\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n^4} + \dfrac{1}{n^5} + \dfrac{1}{n^6}\right| \\ \qquad\qquad - \log^2\left|\dfrac{1}{n^3} - \dfrac{1}{n^4} - \dfrac{2}{n^5} + \dfrac{1}{n^6}\right|, & \text{if } \ n \geq 2, \\ \log|n(n^2+n+3)(n^2+2)-1| \cdot \log\left|\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n^4} + \dfrac{1}{n^5} + \dfrac{1}{n^6}\right| \\ \qquad\qquad - \log^2\left|\dfrac{1}{n^3} - \dfrac{1}{n^4} - \dfrac{2}{n^5} + \dfrac{5}{n^6}\right|, & \text{if } \ n \leq -2. \end{cases}$$

一方，

$$\Delta = d(f_n) = (n^2+1)^2(n^2+3)^2(n^4+n^3+4n^2+3)^2$$

であるので，(2.2) を用いると

$$R' \geq B_2(n)$$

を得る. ここで

$$B_2(n) := \frac{1}{4}\log^2 \frac{(n^2+1)(n^2+3)(n^4+n^3+4n^2+3)}{2}$$

である. 従って, 不等式

$$[E' : E''] = \frac{R''}{R'} < \frac{|B_1(n)|}{B_2(n)}$$

を得る. この式の右辺は, $|n| \geq 2$ なるすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して 3 未満の値をとる. (ここで, $|B_1(n)|$ は $19\log^2|n|$ に, $B_2(n)$ は $16\log^2|n|$ に近似されることを注意しておく.) よって, 補題 2.1 より $E' = E''$, つまり $\{\theta,\ \theta'\}$ が整環 $\mathcal{O}$ の基本単数系であることがわかる.

また $|n| < 2$ のときは, 実際に $R'' = |\log|\theta_1| \cdot \log|\theta_3| - \log^2|\theta_2||$ を計算し, $R''/B_2(n) < 2$ が確認される. 従って $[E' : E''] = 1$ を得る.

以降, N は平方因子を持たないと仮定する. $|n| \geq 2$ なるとき, (2.3) を用いると

$$R \geq \frac{1}{16}\log^2 \frac{D(K_n)}{4} =: B_3(n)$$

を得る. ここで, $D(K_n)$ は系 1.5 で得られていることに注意する. 従って

$$[E : E''] = \frac{R''}{R} < \frac{|B_1(n)|}{B_3(n)} \tag{2.4}$$

を得る. N が平方因子を持たず, かつ $|n| \geq 2$ のとき, 不等式 (2.4) の右辺は次の場合を除き 3 未満の値をとる:

$$n \in \left\{ \begin{matrix} -227, & -173, & -119, & -65, & -38, & -11, & -7, & -5, & -3, & -2, \\ 5, & 7, & 16, & 25, & 43, & 97, & 151, & 205, & 259 & \end{matrix} \right\}.$$

従って, 補題 2.1 から上の 19 個の場合を除いては $[E : E''] = 1$ であることがわかる. 残りの 19 個と $|n| < 2$ なる場合は, 直接 R と R'' を計算することにより求める結果を得る.

3. 定理 3 の証明

定理 3 を証明するために, 次の G. Lettl の類数に関する下界を用いる:

$$h(K_n) > \frac{0.023 \cdot \mathfrak{f}(K_n)^{0.946}}{4R}, \quad \text{if } \mathfrak{f}(K_n) > 10^5. \tag{3.1}$$

ここで, $\mathfrak{f}(K_n)$ は K_n の導手を表す ([8, Section 2] 参照).

さて, N が平方因子を持たず, $n \neq \pm 1,\ -2$ とする. このとき, 前節で見たように $R'' = R$ であることから, $R \leq |B_1(n)|$ が成り立つ. よって, 不等式 (3.1) を適用すると

$$h(K_n) > \frac{0.023 \cdot \{(n^2+3)(n^4+n^3+4n^2+3)/108\}^{0.946}}{4|B_1(n)|}, \quad \text{if } \mathfrak{f}(K_n) > 10^5$$

を得る. そこでこの式の右辺を計算すると, $|n| > 78$ の範囲で 10^4 以上であり, かつこのとき $\mathfrak{f}(K_n) > 10^5$ を満たしている. よって, 後は $|n| \leq 77$ の範囲を実際にチェックすればよい (第 5 節参照). 以上により定理 3 が証明された.

4. 多項式 $f_n(X)$ について

D. Shanks は [14] において, L. C. Washington は [17] において, それぞれ次の多項式を扱った:

$$\varphi_n(X) = X^3 - nX^2 - (n+3)X - 1,$$
$$\psi_n(X) = X^3 - (n^3 - 2n^2 + 3n - 3)X^2 - n^2X - 1.$$

多項式の判別式はそれぞれ

$$d(\varphi_n) = (n^2 + 3n + 9)^2 \in \mathbb{Z}[n]^2,$$
$$d(\psi_n) = (n-1)^2(n^2+3)^2(n^2 - 3n + 3)^2 \in \mathbb{Z}[n]^2,$$

となる. よって, S_n (resp. W_n) で $\varphi_n(X)$ (resp. $\psi_n(X)$) の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を表すことにすると, $\varphi_n(X)$ (resp. $\psi_n(X)$) が $\mathbb{Q}$ 上既約ならば, S_n (resp. W_n) は 3 次巡回体となる.

次の 2 つの定理は, 我々の定理 2 に対応するものである.

定理 4.1 (L. C. Washington [16])**.** 多項式 $\varphi_n(X)$ の根を $\theta,\ \theta'$ とする. もし $n^2 + 3n + 9$ が平方因子を持たないならば, $\{\theta,\ \theta'\}$ は S_n の基本単数系となる.

定理 4.2 (L. C. Washington [17])**.** 多項式 $\psi_n(X)$ の根を $\theta,\ \theta'$ とする. もし $(n^2 + 3)(n^2 - 3n + 3)/9^\delta$ が平方因子を持たず, かつ $n \neq 2$ ならば, $\{\theta,\ \theta'\}$ は W_n の基本単数系となる. ここで, δ は

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{if } \ n \not\equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{if } \ n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

により定める.

さて, 3 次巡回体の集合 $\mathcal{S},\ \mathcal{W},\ \mathcal{K}$ を次のように定める:

$$\mathcal{S} := \{S_n \,|\, n^2 + 3n + 9 \text{ が平方因子を持たない}\},$$
$$\mathcal{W} := \{W_n \,|\, n \neq 2 \text{ かつ } (n^2+3)(n^2-3n+3)/9^\delta \text{ が平方因子を持たない.}$$
$$\text{但し, } \delta \text{ は定理 } 4.2 \text{ で定めた通り}\},$$
$$\mathcal{K} := \{K_n \,|\, n \neq \pm 1,\ -2 \text{ かつ } N \text{ が平方因子を持たない}\}.$$

このとき, $\mathcal{K} \not\subset \mathcal{S} \cup \mathcal{W}$ となっている. 実際, $K_2 \in \mathcal{K}$ かつ $K_2 \notin \mathcal{S} \cup \mathcal{W}$ である.

注意 4.3. 残念ながら, $\mathcal{K}$ が無限集合となるかどうか, つまり N が平方因子を持たないような n が無限に存在するかどうかは著者にはわからない. しかし, A. Granville の結果 [5] から, ABC 予想の下では, 無数の n に対して N が平方因子を持たないことが示される.[2] 集合 $\mathcal{W}$ についても同様である. $\mathcal{S}$ については, unconditional に無限集合であることが示される. (Cusick [4, Lemma 2] を参照.)

[2] このことについては, 徳島大学の片山真一氏に助言を頂いた. この場を借りて, 感謝の意を表する.

では, $f_n(X)$ がどのように構成されたのかを説明する. 2×2 行列

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と $z\in\mathbb{C}$ に対し, 一次分数変換を次で定義する;

$$M(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

例えば, $\varphi_n(X)$ の根を θ とし,

$$M_0:=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと, $\varphi_n(X)$ の他の 2 つの根は $M_0(\theta),\ M_0^2(\theta)$ と表される.

さて, $K=\mathbb{Q}(\xi)$ を我々の多項式が与える 3 次巡回体とする. また, 行列 M_1 を

$$M_1:=\begin{pmatrix} -a & -1 \\ n^2-an+a^2 & n \end{pmatrix}$$

で定義する.

$$M_1^3=-(n-a)^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので, K の生成元 ξ と $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の生成元 σ で $\sigma(\xi)=M_1(\xi)$ を満たすものを取ることができる. 以下, これを示すことにする. まず初めに, すべての $\mathbb{Q}$ 上の 3 次巡回体はある有理数 u に対して, $\varphi_u(X)$ の最小分解体として与えられることに注意する. (これはよく知られた事実である. 証明は, 例えば J.-P. Serre [13, Chapter 1], 三宅 [10] を参照.) 従って, $\sigma(\theta_u)=M_0(\theta_u)$ であり, かつ $\varphi_u(\theta_u)=0$ を満たす $\theta_u\in K$ が存在する. そこで, 行列

$$M_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & -n+a \end{pmatrix}$$

を取り, $\xi:=M_2(\theta_u)$ とおく. このとき

$$M_1=(n-a)M_2M_0M_2^{-1}$$

となり, 従って

$$\sigma(\xi)=M_2(\sigma(\theta_u))=M_2(M_0(\theta_u))=M_2M_0M_2^{-1}(\xi)=M_1(\xi)$$

を得る.

次に u を決定する.

$$\xi=\frac{-\theta_u}{a\theta_u-n+a}$$

であるので, これを θ_u について解き, $\theta_u^3-n\theta_u^2-(n+3)\theta_u-1=0$ に代入して整理すると

$$\begin{aligned}&(n^3-3an^2+a^3-uan(n-a))\xi^3\\ &\quad+(-6an+3a^2-u(n+a)(n-a))\xi^2+(-3n-u(n-a))\xi-1=0\end{aligned}$$

を得る. そこで, ξ^3 の係数を 1 とするために

$$u=\frac{n^3-3an^2+a^3-1}{an(n-a)} \tag{4.1}$$

を代入し整理すれば, 関係式

$$\xi^3+\left(3n^2-3an+3a^2-(n+a)\frac{n^3+a^3-1}{an}\right)\xi^2-\frac{n^3+a^3-1}{an}\xi-1=0$$

を得る. 従って, ξ は多項式

$$F_n(X;a)=$$
$$X^3+\left(3n^2-3an+3a^2-(n+a)\frac{n^3+a^3-1}{an}\right)X^2-\frac{n^3+a^3-1}{an}X-1$$

の根となる. さて, $(n^3+a^3-1)/an\in\mathbb{Z}[n]$ となるような $a\in\mathbb{Z}[n]$ は, 次の場合が考えられる:

$$a=1,\ -n+1,\ n^2+n+1,\ -n^3+1.$$

まず $a=1$ ととると, $F_n(X;1)=\psi_n(X)$, つまり Washington の多項式を得る. また, $a=n^2+n+1$ のときは $F_n(X;n^2+n+1)=f_n(X)$ となり, 我々の多項式が得られる.

また, 式 (4.1) より

$$u=\begin{cases}\dfrac{n(n-3)}{n-1}, & \text{if } a=1,\\ -\dfrac{n^3+2n^2+3}{n^2+1}, & \text{if } a=n^2+n+1\end{cases}$$

であることから, 次の結果を得る.

命題 **4.4.** 記号は上記の通りとする. このとき

$$S_{\frac{n(n-3)}{n-1}}=W_n,\quad S_{-\frac{n^3+2n^2+2}{n^2+1}}=K_n$$

が成り立つ.

注意 **4.5.** 残りの $a=-n+1,\ -n^3+1$ なる場合の多項式 $F_n(X;a)$ は

$$F_n(X;-n+1)=X^3+3(3n^2-3n+2)X^2+3X-1,$$
$$F_n(X;-n^3+1)=$$
$$X^3+(n^8+2n^6-3n^5+3n^4-4n^3+5n^2-3n+3)X^2-n^2(n^3-2)X-1.$$

となる. Shanks の多項式 $\varphi_{-3n}(X)$ の 3 つの根を $\theta,\ \theta',\ \theta''$ とすると, $F_n(X;-n+1)$ の根は $-\theta(\theta+1),\ -\theta'(\theta'+1),\ -\theta''(\theta''+1)$ と表すことができる. 従って, $F_n(X;-n+1)$ の最小分解体は "simplest cubic field" S_{-3n} に一致する.

多項式 $F_n(X;-n^3+1)$ については, 今後の課題とする.

5. 数表

この論文の最後に $|n|\le 120$ の範囲のリストを挙げておく. ここで左上にアスタリスク (*) がついているものは, N の値が平方因子を持つ場合である. なお, この表は GP/PARI (Version 2.1.0) を用いて作成した.

References

[1] D. Byeon, A note on class numbers of the simplest cubic fields, *J. Number Theory* **65** (1997), 175–178.

[2] D. Byeon, Class number 3 problem for the simplest cubic fields, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 1319–1323.

[3] R. J. Chapman, Automorphism polynomials in cyclic cubic extensions, *J. Number Theory* **61** (1996), 283–291.

[4] T. W. Cusick, "Number theory, Noordwijkerhout 1983. Lower bounds for regulators," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1068, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[5] A. Granville, *ABC* allows us to count squarefrees, *Internat. Math. Res. Notices*, No. 19 (1998), 991–1009.

[6] E. Lehmer, Connection between Gaussian periods and cyclic units, *Math. Comp.* **50** (1988), 535–541.

[7] F. Lemmermeyer and A. Pethő, Simplest cubic fields, *Manuscripta Math.* **88** (1995), 53–58.

[8] G. Lettl, A lower bound for the class number of certain cubic number fields, *Math. Comp.* **46** (1986), 659–666.

[9] P. Llorente and E. Nart, Effective determination of the decomposition of the rational primes in a cubic field, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 579–585.

[10] K. Miyake, Linear fractional transformations and cyclic polynomials, *Adv. Stud. Contemp. Math.* (*Pusan*) **1** (1999), 137–142.

[11] P. Morton, Characterizing cyclic cubic extensions by automorphism polynomials, *J. Number Theory* **49** (1994), 183–208.

[12] R. Schoof and L. C. Washington, Quintic polynomials and real cyclotomic fields with large class numbers, *Math. Comp.* **50** (1988), 543–556.

[13] J.-P. Serre, "Topics in Galois theory," Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.

[14] D. Shanks, The simplest cubic fields, *Math. Comp.* **28** (1974), 1137–1152.

[15] E. Thomas, Fundamental units for orders in certain cubic number fields, *J. Reine Angew. Math.* **310** (1979), 33–55.

[16] L. C. Washington, Class numbers of the simplest cubic fields, *Math. Comp.* **48** (1987), 371–384.

[17] L. C. Washington, A family of cubic fields and zeros of 3-adic L-functions, *J. Number Theory* **63** (1997), 408–417.

[18] M. Watabe, On certain cubic fields. III, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **59** (1983), 260–262.

TABLE 1

n	conductor of K_n	class number of K_n	n	conductor of K_n	class number of K_n
$^*-120$	$3^2 \cdot 7 \cdot 967 \cdot 1447 \cdot 4801$	99543492	-60	$3^2 \cdot 7 \cdot 541 \cdot 1123 \cdot 1201$	12445731
-119	$2131 \cdot 3457 \cdot 3541$	12836313	-59	$3^2 \cdot 13 \cdot 67 \cdot 181 \cdot 7321$	3627828
-118	$19 \cdot 37 \cdot 577 \cdot 733 \cdot 9007$	1189575477	-58	$7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 11134843$	16417161
-117	$3^2 \cdot 7 \cdot 73 \cdot 163 \cdot 848593$	305085123	-57	$3^2 \cdot 7 \cdot 271 \cdot 643 \cdot 769$	11204244
-116	$3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 313 \cdot 91939$	416402127	-56	$3^2 \cdot 43 \cdot 73 \cdot 358201$	2438532
-115	$37 \cdot 3307 \cdot 4687369$	105285852	-55	$757 \cdot 1123 \cdot 8011$	2128176
-114	$3^2 \cdot 7 \cdot 619 \cdot 55822153$	572726700	-54	$3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 73 \cdot 139 \cdot 1231$	6259437
-113	$3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 103 \cdot 283 \cdot 9067$	271593324	-53	$3^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 109 \cdot 1129$	4120551
-112	$2719 \cdot 12547 \cdot 57373$	799221177	-52	$2707 \cdot 7181827$	15974364
-111	$3^2 \cdot 13 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 687163$	100542789	-51	$3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 2214319$	1414503
$^*-110$	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 733 \cdot 7333$	15332571	-50	$3^2 \cdot 7 \cdot 2503 \cdot 97381$	4940028
-109	$7 \cdot 79 \cdot 2971 \cdot 253003$	81044496	-49	$601 \cdot 5656759$	856089
-108	$3^2 \cdot 1483 \cdot 3889 \cdot 30307$	759948237	-48	$3^2 \cdot 769 \cdot 1735681$	9667791
-107	$3^2 \cdot 7 \cdot 337 \cdot 409 \cdot 42829$	246443148	-47	$3^2 \cdot 7 \cdot 79 \cdot 177211$	709749
-106	$7 \cdot 2671 \cdot 6691 \cdot 11239$	255405717	$^*-46$	$7 \cdot 13 \cdot 163 \cdot 89563$	374787
-105	$3^2 \cdot 919 \cdot 40145701$	104524371	$^*-45$	$3^2 \cdot 13 \cdot 421 \cdot 3181$	55728
-104	$3^2 \cdot 31 \cdot 349 \cdot 1279 \cdot 10069$	238467807	-44	$3^2 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 151 \cdot 277$	2607633
-103	$7 \cdot 379 \cdot 111500593$	100639611	-43	$7 \cdot 463 \cdot 478099$	985851
-102	$3^2 \cdot 7 \cdot 109 \cdot 139 \cdot 337 \cdot 3469$	425984832	-42	$3^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 1014889$	4649751
-101	$3^2 \cdot 61 \cdot 2551 \cdot 62581$	42364161	-41	$3^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 193 \cdot 421$	436752
-100	$7 \cdot 67 \cdot 1429 \cdot 1478209$	286463817	-40	$7 \cdot 61 \cdot 229 \cdot 41023$	1013553
-99	$3^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 4529929$	54713232	-39	$3^2 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 127 \cdot 2503$	284877
-98	$3^2 \cdot 13 \cdot 109 \cdot 739 \cdot 93103$	449227377	-38	$73 \cdot 1033 \cdot 1447$	251541
-97	$13 \cdot 181 \cdot 87654247$	49518567	$^*-37$	$661 \cdot 2767$	1488
-96	$3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 439 \cdot 577 \cdot 1567$	241496073	-36	$3^2 \cdot 7 \cdot 433 \cdot 78007$	836676
$^*-95$	$3^2 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 26119$	107487	-35	$3^2 \cdot 307 \cdot 162517$	263601
-94	$283 \cdot 8839 \cdot 273073$	197266491	-34	$19 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 199 \cdot 211$	553392
-93	$3^2 \cdot 7 \cdot 103 \cdot 24678481$	74492811	-33	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 67 \cdot 5743$	283824
-92	$7 \cdot 8467 \cdot 375103$	8934201	-32	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 79 \cdot 16189$	919269
-91	$19 \cdot 109 \cdot 67854517$	17398908	-31	$241 \cdot 897577$	98721
-90	$3^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 331 \cdot 65371$	123883344	-30	$3^2 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 79 \cdot 3319$	542700
-89	$3^2 \cdot 7 \cdot 283 \cdot 6896551$	40232052	-29	$3^2 \cdot 7 \cdot 211 \cdot 3631$	24300
-88	$7 \cdot 61 \cdot 127 \cdot 8474149$	140327343	-28	$787 \cdot 595843$	191217
-87	$3^2 \cdot 631 \cdot 18887179$	65013471	-27	$3^2 \cdot 61 \cdot 171559$	89181
$^*-86$	$3^2 \cdot 7 \cdot 151 \cdot 6010483$	20831769	-26	$3^2 \cdot 7 \cdot 97 \cdot 49123$	104679
-85	$7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 139 \cdot 237859$	33563727	-25	$7 \cdot 157 \cdot 199 \cdot 271$	19953
-84	$3^2 \cdot 13 \cdot 43 \cdot 73 \cdot 181 \cdot 5227$	92289213	-24	$3^2 \cdot 193 \cdot 106753$	132093
-83	$3^2 \cdot 1723 \cdot 1737559$	13495797	-23	$3^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 967$	31347
$^*-82$	$7 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 1039249$	2866212	$^*-22$	$7 \cdot 487 \cdot 4603$	13239
-81	$3^2 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 547 \cdot 54751$	21647979	-21	$3^2 \cdot 37 \cdot 157 \cdot 397$	14364
-80	$3^2 \cdot 19 \cdot 139 \cdot 337 \cdot 32353$	112526091	-20	$3^2 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 5689$	11529
-79	$7 \cdot 223 \cdot 433 \cdot 88873$	14091084	-19	$7 \cdot 13 \cdot 124909$	7317
-78	$3^2 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 2029 \cdot 47059$	109263492	-18	$3^2 \cdot 7 \cdot 109 \cdot 4783$	50733
-77	$3^2 \cdot 1483 \cdot 3857803$	20757744	-17	$3^2 \cdot 73 \cdot 8863$	12636
-76	$5779 \cdot 32946307$	30727803	-16	$7 \cdot 37 \cdot 62467$	10269
-75	$3^2 \cdot 7 \cdot 67 \cdot 109 \cdot 95539$	13057200	-15	$3^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 2293$	2052
-74	$3^2 \cdot 7 \cdot 5479 \cdot 156631$	26613603	-14	$3^2 \cdot 199 \cdot 4051$	5616
-73	$31 \cdot 43 \cdot 79 \cdot 199 \cdot 1783$	22395609	-13	$43 \cdot 27043$	972
-72	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 67 \cdot 131947$	98846811	$^*-12$	$3^2 \cdot 7 \cdot 6529$	657
$^*-71$	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 56857$	1137969	-11	$7 \cdot 31 \cdot 73$	9
-70	$541 \cdot 4903 \cdot 43783$	21573900	-10	$103 \cdot 9403$	912
-69	$3^2 \cdot 61 \cdot 397 \cdot 122173$	4340709	-9	$3^2 \cdot 7 \cdot 2053$	144
-68	$3^2 \cdot 7 \cdot 61 \cdot 193 \cdot 199 \cdot 661$	91604196	-8	$3^2 \cdot 7 \cdot 61 \cdot 67$	1053
-67	$7 \cdot 379 \cdot 1123 \cdot 7489$	11729151	-7	$13 \cdot 37 \cdot 61$	36
-66	$3^2 \cdot 1453 \cdot 6234889$	42974532	-6	$3^2 \cdot 13 \cdot 409$	63
-65	$7 \cdot 31 \cdot 151 \cdot 21019$	97227	-5	$3^2 \cdot 7 \cdot 67$	9
-64	$7 \cdot 4099 \cdot 2361637$	15141933	-4	$7 \cdot 19 \cdot 37$	9
-63	$3^2 \cdot 223 \cdot 331 \cdot 23197$	7846308	-3	$3^2 \cdot 31$	3
-62	$3^2 \cdot 3847 \cdot 1617043$	35169264	-2	$3^2 \cdot 7$	3
$^*-61$	$7 \cdot 19 \cdot 13633747$	357399	-1	7	1

TABLE 2

n	conductor of K_n	class number of K_n	n	conductor of K_n	class number of K_n
0	3^2	1			
1	3^2	1	*61	$3^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 521767$	188352
2	$7 \cdot 43$	3	62	$7 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 439 \cdot 3847$	21410325
*3	$3^2 \cdot 7$	3	63	$3^2 \cdot 331 \cdot 5339629$	5529069
4	$3^2 \cdot 19 \cdot 43$	36	64	$3^2 \cdot 4099 \cdot 1895083$	27087975
5	$7 \cdot 853$	9	65	$7 \cdot 151 \cdot 421 \cdot 43093$	2966301
6	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 79$	81	66	$3^2 \cdot 7 \cdot 1453 \cdot 918079$	22715721
7	$3^2 \cdot 13 \cdot 109$	36	67	$3^2 \cdot 37 \cdot 1123 \cdot 61471$	17931537
8	$31 \cdot 67 \cdot 157$	468	*68	$7 \cdot 277 \cdot 283 \cdot 661$	163809
9	$3^2 \cdot 7 \cdot 2539$	225	69	$3^2 \cdot 7 \cdot 397 \cdot 739 \cdot 1483$	12395916
10	$3^2 \cdot 7 \cdot 103 \cdot 181$	1296	70	$31 \cdot 37 \cdot 787 \cdot 4903$	1108836
11	$31 \cdot 109 \cdot 151$	432	71	$13 \cdot 97 \cdot 4951 \cdot 5209$	6588891
*12	$3^2 \cdot 7 \cdot 7681$	927	72	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 9089281$	111106404
13	$3^2 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 499$	1701	73	$3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 457279$	19981161
14	$199 \cdot 41947$	4359	74	$5479 \cdot 30413707$	43517847
15	$3^2 \cdot 19 \cdot 18301$	1575	75	$3^2 \cdot 7 \cdot 67 \cdot 379 \cdot 28219$	18849348
16	$7 \cdot 37 \cdot 2617$	252	*76	$3^2 \cdot 5779 \cdot 10957$	140544
17	$7 \cdot 73 \cdot 12799$	7479	77	$1483 \cdot 1579 \cdot 22567$	20008143
18	$3^2 \cdot 109 \cdot 37369$	73008	78	$3^2 \cdot 2029 \cdot 12504649$	93849093
19	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73 \cdot 211$	9477	79	$3^2 \cdot 7 \cdot 223 \cdot 1461781$	4304988
20	$7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 24229$	37773	80	$7 \cdot 19 \cdot 337 \cdot 5928229$	57434832
21	$3^2 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 1123$	22059	81	$3^2 \cdot 349 \cdot 547 \cdot 41647$	36397539
22	$3^2 \cdot 487 \cdot 27427$	87381	*82	$3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 83407$	4586463
23	$7 \cdot 19 \cdot 294127$	26271	83	$7 \cdot 1723 \cdot 6865381$	33495444
24	$3^2 \cdot 7 \cdot 193 \cdot 16567$	94284	84	$3^2 \cdot 13 \cdot 181 \cdot 1093 \cdot 15373$	100457172
25	$3^2 \cdot 157 \cdot 15139$	22932	85	$3^2 \cdot 13 \cdot 79 \cdot 139 \cdot 74323$	23226669
26	$7 \cdot 97 \cdot 477259$	76608	*86	$7 \cdot 151 \cdot 55366459$	16922151
*27	$3^2 \cdot 7 \cdot 61 \cdot 3769$	12096	87	$3^2 \cdot 7 \cdot 631 \cdot 2760883$	51944841
28	$3^2 \cdot 31 \cdot 787 \cdot 2293$	359343	88	$3^2 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 127 \cdot 52267$	95462064
29	$73 \cdot 211 \cdot 10069$	30132	89	$7 \cdot 283 \cdot 709 \cdot 89533$	17534016
30	$3^2 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 7573$	454896	90	$3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 73 \cdot 2371$	206965287
31	$3^2 \cdot 7 \cdot 241 \cdot 15193$	146637	91	$3^2 \cdot 19 \cdot 109 \cdot 7706851$	34381908
32	$13 \cdot 79 \cdot 1085443$	715617	92	$73 \cdot 277 \cdot 3583 \cdot 8467$	132316416
33	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 11047$	248913	93	$3^2 \cdot 7 \cdot 103 \cdot 1123 \cdot 22453$	66125241
34	$3^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 109$	304236	94	$3^2 \cdot 7 \cdot 1033 \cdot 1213 \cdot 8839$	189640116
35	$73 \cdot 307 \cdot 21211$	123129	95	$37 \cdot 61 \cdot 82344103$	52943652
36	$3^2 \cdot 433 \cdot 577153$	1594836	96	$3^2 \cdot 7 \cdot 439 \cdot 28618753$	193934007
*37	$3^2 \cdot 139 \cdot 1543$	1953	97	$7 \cdot 13 \cdot 181 \cdot 271 \cdot 1747$	4125411
38	$7 \cdot 1447 \cdot 306541$	2846403	98	$13 \cdot 739 \cdot 93216427$	252075996
39	$3^2 \cdot 31 \cdot 127 \cdot 25579$	518427	99	$3^2 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 2113 \cdot 15313$	68079123
40	$3^2 \cdot 7 \cdot 229 \cdot 292267$	1420524	100	$3^2 \cdot 7 \cdot 1429 \cdot 11226667$	169566399
41	$7 \cdot 421 \cdot 414487$	246348	*101	$7 \cdot 31 \cdot 67 \cdot 1033 \cdot 2551$	6254172
42	$3^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 1064281$	3880656	102	$3^2 \cdot 73 \cdot 223 \cdot 2239 \cdot 3469$	877825188
43	$463 \cdot 129841$	71964	103	$3^2 \cdot 7 \cdot 379 \cdot 12631783$	169210971
44	$7 \cdot 277 \cdot 3841027$	2030301	104	$7 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 349 \cdot 456193$	357599529
*45	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 43 \cdot 4651$	46656	105	$3^2 \cdot 919 \cdot 2887 \cdot 14173$	54140103
46	$3^2 \cdot 13 \cdot 163 \cdot 313 \cdot 1627$	3981393	106	$3^2 \cdot 11239 \cdot 4721617$	112418019
47	$7 \cdot 43 \cdot 79 \cdot 116101$	2520099	107	$7 \cdot 37 \cdot 151 \cdot 409 \cdot 23689$	116909973
48	$3^2 \cdot 7 \cdot 769 \cdot 258487$	6722541	108	$3^2 \cdot 7 \cdot 73 \cdot 3889 \cdot 89599$	1205296848
49	$3^2 \cdot 79 \cdot 601 \cdot 8287$	1360341	109	$3^2 \cdot 439 \cdot 2971 \cdot 36067$	135270891
50	$811 \cdot 2503 \cdot 7873$	3180231	*110	$7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 487 \cdot 303469$	48336912
51	$3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 2302753$	1884303	111	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 79 \cdot 7296379$	101460276
*52	$3^2 \cdot 7 \cdot 2707 \cdot 5641$	915408	112	$3^2 \cdot 457 \cdot 12547 \cdot 38611$	970077627
53	$19 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 271 \cdot 487$	6069168	113	$31 \cdot 103 \cdot 164541337$	178775100
54	$3^2 \cdot 7 \cdot 61 \cdot 139 \cdot 47389$	8217531	114	$3^2 \cdot 7 \cdot 61 \cdot 619 \cdot 931309$	720828153
55	$3^2 \cdot 7 \cdot 373 \cdot 397 \cdot 757$	2239812	115	$3^2 \cdot 7 \cdot 61 \cdot 3307 \cdot 15307$	56072493
56	$43 \cdot 73 \cdot 109 \cdot 91951$	6343947	116	$43 \cdot 109 \cdot 313 \cdot 1675951$	580338675
57	$3^2 \cdot 271 \cdot 1021 \cdot 3511$	6707772	117	$3^2 \cdot 7 \cdot 163 \cdot 63015031$	280119897
58	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 439 \cdot 2917$	30353616	118	$3^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 379 \cdot 733 \cdot 8191$	1196571852
59	$7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 67 \cdot 139 \cdot 409$	2175579	119	$3541 \cdot 202275727$	114671088
60	$3^2 \cdot 1201 \cdot 4396801$	15536727	120	$3^2 \cdot 109 \cdot 4801 \cdot 639589$	533408679