$4A$ 元に関する McKay-Thompson 級数の計算

島倉 裕樹

東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: shima@ms.u-tokyo.ac.jp

頂点作用素代数 (VOA) の公理は Borcherds, Frenkel らによって与えられて，研究されてきた. 特にムーンシャイン加群 ($V^\natural$) は, VOA の最も重要な例の一つであり, その自己同型群はモンスター単純群である.

$V^\natural$ を研究する一つの方法として, 良い対称性を持つ部分 VOA 加群による $V^\natural$ の分解がある. [DLMN] で $V^\natural$ の良い対称性を持つ部分 VOA について考察されている. それら部分 VOA に関する $V^\natural$ の分解は [DGH, KLY1, KLY2] 等で考察されている. [DGH] では, $V^\natural$ が部分 VOA として中心電荷 $1/2$ のヴィラソロ VOA $L(1/2,0)$ の 48 個のコピーのテンソル積を含んでおり, さらにその加群としての $V^\natural$ の既約分解について考察されている.

$L(1/2,0)$ は中心電荷 $1/2$ の W_2 代数であるので, W_n 代数のユニタリ系列の最初元について, 同様の考察をするべきである (cf. [Ma]). W_n 代数に関しては [FKW] の参考文献を参照して頂きたい.

中心電荷 1 の W_4 代数は, ノルム 6 の元で生成される格子 L に付随する格子 VOAV_L の L の自己同型 -1 から誘導される V_L の自己同型の固定部分空間 V_L^+ として実現される事が知られている. そこでより一般的に, ノルム $2k$ $(k \geq 2)$ の元で生成される一次元格子 L に対する VOAV_L^+ を用いて, $L(1/2,0)$ の場合と同様の考察をする. すると, 任意の $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号に対応して $V^\natural$ に $(V_L^+)^{\oplus 24}$ が部分 VOA として含まれる事がわかる. さらに, $V^\natural$ の $(V_L^+)^{\oplus 24}$-加群としての分解はその符号を用いて完全に記述される. 各分解因子上に適当なスカラー倍をする写像を考える事で, $V^\natural$ の自己同型写像を得る事が出来る. 特に k が奇数の場合には, その写像はモンスター単純群の共役類 $4A$ に入る事がわかる. したがって, $4A$ に関する McKay-Thompson 級数を与えることが出来て, [CN] の結果と併せる事で保形関数に関する公式を得る.

最後に, ある $\mathbf{Z}_6$ 上符号に関する分解を用いて McKay-Thompson 級数の明示的な表示を計算機を用いて求めた結果を与える.

詳細は [Sh] をご覧頂きたい. 頂点作用素代数の一般論は [Bo1, FLM, MN], $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の符号に関する基本的な定義等は [BDHO, DHS] を参照して頂きたい.

1 準備

1.1 頂点作用素代数

Definition 1. $\mathbb{C}$ 上の頂点作用素代数 (VOA) $V=(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ とは

$$\begin{aligned} V &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n\text{は } \mathbb{C} \text{ 上の有限次元ベクトル空間}, \\ Y &: \quad V \to (\mathrm{End}V)[[z,z^{-1}]] \text{ 線形写像}, \\ v &\mapsto Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} v_n z^{-n-1}, \\ \mathbf{1},\omega &\in V, \end{aligned}$$

で次の (1) から (7) までの公理を満たすものである. 以下, $u,v,w\in V$, $m,n,q\in\mathbf{Z}$ とする.

(1) $u_n v=0$ for $n\gg 0$.
(2) $Y(\mathbf{1},z)=Id_V$, Id_V は $\mathrm{End}(V)$ の単位元.
(3)

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{m}{i}(u_{q+i}v)_{m+q-i}w=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{q}{i}[u_{m+q-i}(v_{n+i}w)-(-1)^q v_{n+q-i}(u_{m+i}w)].$$

(4) $Y(v,z)\mathbf{1}\in(\mathrm{End}V)[[z]]$, $v_{-1}\mathbf{1}=v$.
(5) $\omega\in V_2$ である. また, $L(n)=w_{n+1}$ とおくと次が成り立つ:

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\frac{1}{12}(m^3-m)c\delta_{m+n,0}$$

where $c\in\mathbb{Q}$.
(6) $L(0)v=nv$ for $v\in V_n$.
(7)

$$\frac{d}{dz}Y(v,z)=Y(L(-1)v,z).$$

本稿で必要な VOA の自己同型写像と指標を定義する.

Definition 2. $V=(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ を VOA とする. 線形自己同型写像 $g:\ V\to V$ が

(1) $gY(v,z)g^{-1}=Y(gv,z)$ for $v\in V$
(2) $g\omega=\omega$
(3) $g\mathbf{1}=\mathbf{1}$

を満たす時に VOA V の自己同型写像であるという.

Definition 3. $V=\sum_{i=0}^{\infty}V_n$ を VOA とする. 形式的冪級数

$$\mathrm{ch}V(q):=\sum_{n=0}^{\infty}(\dim V_n)q^n$$

を V の指標という.

次に, 本稿で扱う VOA について簡単に述べる.

平方長さ $2k$ の元 α を生成元とする 1 次元格子 $L=\mathbf{Z}\alpha$ から構成される格子 VOA を V_L とする (cf. [FLM]). 格子 L の自己同型 -1 から誘導される V_L の自己同型の固定部分空間 V_L^+ は VOA となる. [DN] より, 既約 V_L^+-加群は

$$\{V_L^{\pm},V_{\alpha/2+L}^{\pm},V_{r\alpha/2k+L},V_L^{T_i,\pm}|1\leq r\leq k-1\ i=0,1\}$$

の $k+7$ 個のいずれかと同型である.

V_Λ^+ をリーチ格子 Λ から構成される格子 VOAV_Λ の Λ の自己同型 -1 から誘導される V_Λ の自己同型の固定部分空間として, $V_\Lambda^{T,+}$ を V_Λ の twisted 加群 V_Λ^T の位数 2 の自己同型による固定部分空間としたときに, ムーンシャイン加群は $V^\natural=V_\Lambda^+\oplus V_\Lambda^{T,+}$ として構成される ([FLM]).

$V^\natural$ は非常に重要な VOA の例であるが, 特に次のような性質を持っている.

(1) $\mathrm{Aut}(V^\natural)=\mathbf{M}$ (モンスター単純群).
(2) $q^{-1}\mathrm{ch}V^\natural(q)=J(q)-744=q^{-1}+196884q+\cdots$.

モンスター単純群の共役類に対応して保形関数が次の様に定まる.

Definition 4. $g\in\mathbf{M}$ に対して定まる次の形式的冪級数

$$T_g(q):=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{tr}g_{|V_n^\natural})q^{n-1}$$

を McKay-Thompson 級数という. ただし, $\mathbb{H}$ を $\mathbb{C}$ の上半平面として $q=e^{2\pi i\tau},\ \tau\in\mathbb{H}$ とおくことで $T_g(q)$ はある離散群に関する保形関数となる.

注意 **5.** $\mathbf{M}$ の共役類に対して McKay-Thompson 級数が一意に決まるので, 共役類 X に関する McKay-Thompson 級数を $T_X(q)$ と書く.

全ての共役類に関する級数と離散群の組のリストは Conway, Norton によって予想されて ([CN]), Borcherds によって解決されている ([Bo2]).

本稿では, $V^\natural$ 上に共役類 $4A$ の元の作用を与えて, 定義から直接 McKay-Thompson 級数を得る事で, [CN] に記述されている表示とは別の表示を得る事を述べる.

1.2 $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の extremal Type II 符号

$\mathbf{Z}_{2k} = \{0, 1, \ldots, 2k-1\}$ を位数 $2k$ の整数環の剰余環とする．$\mathbf{Z}_{2k}^n$ の $\mathbf{Z}_{2k}$-部分加群を $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ n の符号と呼ぶ．$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Z}_{2k}^n$ に対して，Euclidean weight を $\sum_{i=1}^n \min\{x_i^2,\ (2k - x_i)^2\}$ で与える．また，$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対して，通常内積を $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ で定義をする．$\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ n の符号 C に対して，双対符号 $C^\perp := \{x \in \mathbf{Z}_{2k}^n | \langle x, y\rangle = 0 (\forall y \in C)\}$ と定義する．$C = C^\perp$ のとき C は自己双対とよばれる．$\mathbf{Z}_{2k}$ 上の自己双対符号で全ての元の Euclidean weight が $4k$ の倍数であるとき Type II 符号とよばれる．特に長さが 24 の符号で 0 を除いた Euclidean weight の最小値が $8k$ のとき extremal Type II 符号とよばれる．

$\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号に関して次のような存在定理がある．

命題 6. [Ch, GH] 全ての $k \geq 1$ に対して，$\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号が存在する．

2 主定理

この章では主定理を述べる．最初に，主定理の記述に用いる記号を定義する．

平方長さ $2k$ の元 α を生成元とする 1 次元格子を $L = \mathbf{Z}\alpha$ とする．V_L^+ を 1.1 節で与えた L から作られる VOA の固定部分空間とする．

$c = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{24}) \in \mathbf{Z}_{2k}^{24}$ に対して

$$M(c) := \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i\alpha/2k+L}$$

とおき，$c = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{24}) \in \mathbf{Z}_2^{24}$ に対して

$$\begin{aligned} M(c)^+ &:= \bigoplus_{\substack{e_i \in \{\pm\} \\ \prod e_i = +}} \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i\alpha/2+L}^{e_i}, \\ M^T(c)^- &:= \bigoplus_{\substack{e_i \in \{\pm\} \\ \prod e_i = -}} \bigotimes_{i=1}^{24} V_L^{T_{c_i}, e_i} \end{aligned}$$

とおく．ただし，$\{\pm\}$ は $\{-\}$ を生成元とする位数 2 の群とする．

次が主定理である．

定理 7. C を $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号とする．$C_2 = \{(c_1, \ldots, c_{24}) \in C | c_i = 0 \pmod{k} \text{ for all i}\}$ と置き，二進符号と見る．$m = \dim C_2$ とおく．

そのとき，$V^\natural$ の部分 $\mathrm{VOA}(V_L^+)^{\otimes 24}$ で次を満たすものが存在する．

(1) V_Λ^+ は $(V_L^+)^{\otimes 24}$-加群として次のように分解される:

$$V_\Lambda^+ \cong \bigoplus_{c\in C_2} \bigoplus_{\substack{e_i\in\{\pm\}\\ \prod e_i=+}} \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i\alpha/2+L}^{e_i} \oplus \frac{1}{2} \bigoplus_{c\in C\setminus C_2} \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i\alpha/2k+L}.$$

(2) $V_\Lambda^{T,+}$ は $(V_L^+)^{\otimes 24}$-加群として次のように分解される:

$$V_\Lambda^{T,+} \cong \bigoplus_{c\in C_2^\perp} \bigoplus_{\substack{e_i\in\{\pm\}\\ \prod e_i=-}} \bigotimes_{i=1}^{24} 2^{m-12} V_L^{T_{c_i},e_i},$$

注意 8. $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ 24 の符号上において $\tilde{S_{24}} = \mathbf{Z}_2 \wr S_{24}$ の作用によって同値関係を与えた時に, この分解はテンソル積の置換を除いて extremal Type II 符号の同値類上一意に定まる.

3 $4A$ 元に関する McKay-Thompson 級数

3.1 $4A$ 元と $2B$ 元

この定理の応用としてモンスター単純群の共役類 $4A$, $2B$ の元の作用を各既約成分上にスカラー倍をする事で与える.

V_L^+ のフュージョン規則は [Ab] で決定されている. それを用いて次のような命題を得る (cf. [Ma]).

命題 9. (1) k を奇数とする.

$$\begin{aligned} 1 &\quad \text{on} \quad \{V_L^\pm, V_{i\alpha/k+L} | 1\le i\le (k-1)/2\},\\ -1 &\quad \text{on} \quad \{V_{\alpha/2+L}^\pm, V_{(2i-1)\alpha/2k+L} | 1\le i\le (k-1)/2\},\\ \sqrt{-1} &\quad \text{on} \quad \{V_L^{T_0,\pm}\},\\ -\sqrt{-1} &\quad \text{on} \quad \{V_L^{T_1,\pm}\} \end{aligned}$$

は V_L^+ のフュージョン規則を保つ.

(2) k を偶数とする.

$$\begin{aligned} 1 &\quad \text{on} \quad \{V_L^\pm, V_{\alpha/2+L}^\pm, V_{i\alpha/2k+L} | 1\le i\le (k-1)\},\\ -1 &\quad \text{on} \quad \{V_L^{T_0,\pm}, V_L^{T_1,\pm}\} \end{aligned}$$

は V_L^+ のフュージョン規則を保つ.

Γ を V_L^+ の既約加群全体の集合として,

$$V^\natural = \bigoplus_{(W_1,\dots,W_{24})\in\Gamma^{24}} m_{W_1,\dots W_{24}} W_1 \otimes \cdots \otimes W_{24}$$

のような既約分解が与えられたとする.

各既約加群上に, テンソル積の i 番目の V_L^+ 加群に対応する命題 9 で与えられたスカラー倍をする $V^\natural$ の線形写像を σ_i と置く. すると, σ_i はフュージョン規則を保つので次のような命題を得る.

命題 10. *σ_i は $V^\natural$ の VOA としての自己同型である.*

命題 10 を定理 7 に適用してみる. k が偶数の時は, σ_i は V_Λ^+ 上で 1, $V_\Lambda^{T,+}$ 上で -1 として作用する. よって共役類 $2B$ の元となる. k が奇数の時は, 定理 7 と命題 9 によって位数が 4 であることがわかる. また, σ_i^2 が共役類 $2B$ の元となり, モンスター単純群における中心化群は $2_+^{1+24}.Conway_1$ と同型となる ([FLM]). ただし, $2_+^{1+24}.Conway_1$ は,$Conway_1$(Conway 群のうちで単純かつ位数最大の群) の extra-special 群 2_+^{1+24} による不分裂拡大とする. σ_i^2 と σ_i は可換であるので, $\sigma_i \in 2_+^{1+24}.Conway_1$ を得る. σ_i は $Conway_1$ の作用とした見たときには自明な作用になるので, $\sigma_i \in 2_+^{1+24}$ を得る. 2_+^{1+24} は共役類 $4A$, $2A$, $2B$, $1A$ の元しか含まないことが知られているので, 次の命題を得る.

命題 11. *定理 7 で得られた分解において, $\sigma_i \in 2_+^{1+24} \subset \mathbf{M}$. 特に k が奇数の時は, σ_i は共役類 $4A$ の元である.*

3.2 McKay-Thompson 級数

σ_i を用いて, $4A$ 元に関する McKay-Thompson 級数の明示的な表示を与える. この節では k を奇数で 3 以上と仮定する. k が偶数の場合には σ_i に関する McKay-Thompson 級数は [FLM] で与えられていることを注意しておく.

まず, McKay-Thompson 級数を記述するのに用いる記号を定義する. ρ: $\mathbf{Z}_{2k} \to \mathbf{Z}_2$ を標準写像として, π_i: $\mathbf{Z}_{2k}^{24} \to \mathbf{Z}_{2k}$ を i 番目成分を取り出す写像とする. これらの合成写像を $\tau_i = \rho \circ \pi_i$ とおく. 定理 7 と命題 10 を用いると次の様な計算結果を得る.

補題 12.

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Tr}\ \sigma_{i_{|(V_\Lambda^+)_n}}) q^n = \frac{1}{2}\sum_{c\in C} (-1)^{\tau_i(c)} \mathrm{ch}(M(c)) + b^{24},$$

$$\text{where } b = \frac{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)}{\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})}.$$

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Tr}\ \sigma_{i_{|(V_\Lambda^{T,+})_n}}) q^n = 0.$$

系 13. $4A$ 元 σ_i に関する McKay-Thompson 級数は次の様に与えられる.

$$T_{4A}(q) = q^{-1}\{\frac{1}{2}\sum_{c\in C}(-1)^{\tau_i(c)}\mathrm{ch}(M(c)) + b^{24}\}.$$

[CN] の結果と見比べることで次の等式を得る.

注意 14.

$$\frac{\eta(q^2)^{48}}{\eta(q)^{24}\eta(q^4)^{24}} - 24 = q^{-1}\frac{1}{2}\sum_{c\in C}(-1)^{\tau_i(c)}\mathrm{ch}(M(c)) + \frac{\eta(q)^{24}}{\eta(q^2)^{24}}.$$

3.3 例

この節では具体的な符号に関しての McKay-Thompson 級数の計算結果を述べる. 次のような生成行列をもつ符号は $\mathbf{Z}_6$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号となる.

$$\begin{pmatrix}
100000000000 & 311444111414 \\
010000000000 & 215335135553 \\
001000000000 & 554112122051 \\
000100000000 & 515045220335 \\
000010000000 & 520101134534 \\
000001000000 & 523052530121 \\
000000100000 & 555353214200 \\
000000010000 & 545510245154 \\
000000001000 & 514431545300 \\
000000000100 & 522413033255 \\
000000000010 & 503143145243 \\
000000000001 & 510502413341
\end{pmatrix}$$

この符号に関する McKay-Thompson 級数を計算機を用いて計算した. 以下はその結果である.

$$
\begin{aligned}
T_{4A}(q) &= \frac{1}{2}a_0^{24}+\frac{1}{2}b^{24}-\frac{1}{2}a_3^{24}+24a_2^{24}-24a_1^{24}\\
&+ \frac{253}{2}a_0^{16}a_3^8-\frac{253}{2}a_0^8a_3^{16}+2024a_0^{15}a_2^9-2024a_1^9a_3^{15}\\
&+ 4048a_0^7a_2^9a_3^8-4048a_0^8a_1^9a_3^7+6072a_0^4a_2^{12}a_3^8-6072a_1^4a_2^8a_3^{12}\\
&+ 6072a_0^{12}a_1^8a_2^4-6072a_0^8a_1^{12}a_3^4+6072a_1^2a_2^{16}a_3^6-6072a_0^6a_1^{16}a_2^2\\
&+ 6072a_1^8a_2^{16}-6072a_1^{16}a_2^8+8096a_0^{13}a_1^6a_2^3a_3^2-8096a_0^2a_1^3a_2^6a_3^{13}\\
&+ 12144a_0^3a_2^{21}-12144a_1^{21}a_3^3+24288a_0^2a_1^1a_2^{14}a_3^7-24288a_0^7a_1^{14}a_2^1a_3^2\\
&+ 30912a_0^{12}a_2^{12}-30912a_1^{12}a_3^{12}+36432a_0^{12}a_1^5a_2^4a_3^3-36432a_0^3a_1^4a_2^5a_3^{12}\\
&+ 42504a_0^8a_1^1a_2^8a_3^7-42504a_0^7a_1^8a_2^1a_3^8+85008a_1^5a_2^{16}a_3^3-85008a_0^3a_1^{16}a_2^5\\
&+ 97152a_0^5a_1^1a_2^{11}a_3^7-97152a_0^1a_1^5a_2^7a_3^{11}+97152a_0^{11}a_1^7a_2^5a_3^1-97152a_0^7a_1^{11}a_2^1a_3^5\\
&+ 99176a_0^6a_2^{18}-99176a_1^{18}a_3^6+121440a_0^{11}a_1^4a_2^5a_3^4-121440a_0^4a_1^5a_2^4a_3^{11}\\
&+ 121440a_0^9a_1^2a_2^7a_3^6-121440a_0^6a_1^7a_2^2a_3^9+121440a_0^9a_2^{15}-121440a_1^{15}a_3^9\\
&+ 161920a_0^1a_1^3a_2^{15}a_3^5-161920a_0^5a_1^{15}a_2^3a_3^1+178112a_0^{10}a_1^3a_2^6a_3^5-178112a_0^5a_1^6a_2^3a_3^{10}\\
&+ 267168a_0^9a_1^8a_2^7-267168a_1^7a_2^8a_3^9+364320a_0^3a_1^2a_2^{13}a_3^6-364320a_0^6a_1^{13}a_2^2a_3^3\\
&+ 655776a_0^{10}a_1^6a_2^6a_3^2-655776a_0^2a_1^6a_2^6a_3^{10}+655776a_0^6a_1^2a_2^{10}a_3^6-655776a_0^6a_1^{10}a_2^2a_3^6\\
&+ 680064a_0^1a_1^6a_2^{15}a_3^2-680064a_0^2a_1^{15}a_2^6a_3^1+850080a_0^3a_1^8a_2^{13}-850080a_1^{13}a_2^8a_3^3\\
&+ 1457280a_0^2a_1^7a_2^{14}a_3^1-1457280a_0^1a_1^{14}a_2^7a_3^2+1493712a_0^6a_1^8a_2^{10}-1493712a_1^{10}a_2^8a_3^6\\
&+ 1578720a_0^2a_1^4a_2^{14}a_3^4-1578720a_0^4a_1^{14}a_2^4a_3^2+1845888a_0^9a_1^5a_2^7a_3^3-1845888a_0^3a_1^7a_2^5a_3^9\\
&+ 1845888a_0^7a_1^3a_2^9a_3^5-1845888a_0^5a_1^9a_2^3a_3^7+2404512a_0^4a_1^3a_2^{12}a_3^5-2404512a_0^5a_1^{12}a_2^3a_3^4\\
&+ 2428800a_0^8a_1^7a_2^8a_3^1-2428800a_0^1a_1^8a_2^7a_3^8+2610960a_0^8a_1^4a_2^8a_3^4-2610960a_0^4a_1^8a_2^4a_3^8\\
&+ 5829120a_0^3a_1^5a_2^{13}a_3^3-5829120a_0^3a_1^{13}a_2^5a_3^3+6509184a_0^5a_1^7a_2^{11}a_3^1-6509184a_0^1a_1^{11}a_2^7a_3^5\\
&+ 7164960a_0^5a_1^4a_2^{11}a_3^4-7164960a_0^4a_1^{11}a_2^4a_3^5+7504992a_0^7a_1^6a_2^9a_3^2-7504992a_0^2a_1^9a_2^6a_3^7\\
&+ 9512800a_0^4a_1^6a_2^{12}a_3^2-9512800a_0^2a_1^{12}a_2^6a_3^4+10565280a_0^6a_1^5a_2^{10}a_3^3-10565280a_0^3a_1^{10}a_2^5a_3^6,
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
a &= q^{-\frac{1}{24}}\mathrm{ch}V_L=\frac{1}{\eta(q)}\sum_{k\in\mathbf{Z}}q^{3k^2}\\
b &= q^{-\frac{1}{24}}\mathrm{ch}V_{L+\frac{\alpha}{6}}=\frac{1}{\eta(q)}\sum_{k\in\mathbf{Z}}q^{(3k+\frac{1}{6})^2}\\
c &= q^{-\frac{1}{24}}\mathrm{ch}V_{L+\frac{\alpha}{3}}=\frac{1}{\eta(q)}\sum_{k\in\mathbf{Z}}q^{(3k+\frac{1}{3})^2}\\
d &= q^{-\frac{1}{24}}\mathrm{ch}V_{L+\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\eta(q)}\sum_{k\in\mathbf{Z}}q^{(3k+\frac{1}{2})^2}\\
e &= q^{-\frac{1}{24}}(\mathrm{ch}V_L^+-\mathrm{ch}V_L^-)=\frac{1}{\eta(q)}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^kq^{k^2}\\
\eta(q) &= q^{\frac{1}{24}}\prod_{n\geq 1}(1-q^n).
\end{aligned}
$$

参考文献

[Ab] T. Abe, Fusion Rules for the Charge Conjugation Orbifold, *J. Algebra* **242** (2001), 624-655.

[BDHO] E. Bannai, S.T. Dougherty, M. Harada, and M. Oura, Type II Codes, Even Unimodular Lattices, and Invariant Rings, *IEEE Trans. Inform. Theory* **45** (1999), 1194-1205.

[Bo1] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068-3071.

[Bo2] R. E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math* **109** (1992), 405-444.

[Ch] R. Chapman, Double circulant constructions of the Leech lattice, *J. Aust. Math. Soc. Ser. A* **69** (2000), 287-297.

[CN] J.H. Conway and S.P. Norton, Monstruos moonshine, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 308-339.

[DGH] C. Dong, R. L. Griess Jr., and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407-448.

[DHS] S. T. Dougherty, M. Harada and P. Solé, Self-dual codes over rings and the Chinese remainder theorem. *J. Math. Hokkaido Univ.* **28** (1999), 253-283.

[DLMN] C. Dong, H. Li, G. Mason, and S. P. Norton, Associative subalgebras of the Griess algebra and related topics, "Proceedings of the Conference on the Monster and Lie algebra at Ohio State University" (J. Ferrar and K. Harada, Eds), de Gruyter, Berlin, New York, 1996.

[DN] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of Vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L, *Comm. Math. Phys.* **202** (1999), 169-195.

[FKW] E. Frenkel, V. Kac and M. Wakimoto, Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfeld-Sokolv reduction, *Comm. Math. Phys.* **147** (1992), 295-328.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Pure and Appl. Math. Vol.134, Academic Press, Boston, (1988).

[GH] T. A. Gulliver, M. Harada, Orthogonal Frames in the Leech Lattice and a Type II code over $\mathbf{Z}_{22}$, *J. Combin. Theory. Ser. A* **95** (2001), 185-188.

[KLY1] M. Kitazume, C.H. Lam and H. Yamada, Decomposition of the Moonshine Vertex Operator Algebra as Virasoro Modules, *J. Algebra* **226** (2000), 893-919.

[KLY2] M. Kitazume, C.H. Lam and H. Yamada, Moonshine Vertex Operator Algebra as $L(\frac{1}{2},0) \otimes L(\frac{7}{10},0) \otimes L(\frac{4}{5},0) \otimes L(1,0)$-Modules, Preprint.

[Ma] A. Matsuo, Norton's Trace Formulae for the Griess Algebra of a Vertex Operator Algebra with Larger Symmetry, Preprint.

[MN] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axioms for a Vertex Algebra and the Locality of Quantum Fields, MSJ-Memoirs 4, Mathematical Society of Japan, (1999).

[Sh] H. Shimakura, Decompositions of the Moonshine Module with respect to sub-VOAs associated to codes over $\mathbf{Z}_{2k}$ Preprint, math.QA/0104160.