

# 貫通直線探索法による実射影平面上 8直線アレンジメントの生成実験

福井哲夫\*

関口次郎†

## 概要

In this report, a problem of classifying eight-line arrangements on the real projective plane is discussed. By using the combinatorial geometric method of finding transversals for all given segments, all possible eight-line arrangements have been generated from samples of seven-line arrangements, which are different each other. As a result, 135 kinds of eight lines arrangements have been observed.

## 1 はじめに

実射影平面  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  上の  $n$  直線アレンジメント  $\mathcal{A}(H)$  は、 $n$  個の直線  $H = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  による分割として定義される [2]。アレンジメント  $\mathcal{A}(H)$  が単純であるとは次の場合を言う。

**条件 1**  $n$  直線  $l_1, l_2, \dots, l_n$  は互いに異なる。

**条件 2**  $n$  直線  $l_1, l_2, \dots, l_n$  の内、いずれの 3 直線も 1 点で交わらない。

この論文では、この単純アレンジメントについて議論する。 $n$  が 5 以下の直線については、どのような配置をとっても連続変形に対して連結であって、1 種類のアレンジメントしか存在しない。単純な 6 直線アレンジメントは 4 種類のタイプに、7 直線では 11 種類に分類されることが知られている (例えば、1967 年 Grünbaum[9], p.395 参照)。

さて、この単純アレンジメントに後で述べる**条件 3**を加えることによって、6 直線および 7 直線アレンジメントとタイプ  $E_6$  および  $E_7$  のルート系との間にそれぞれ関係があることが示された。特に**条件 1, 2, 3**をもつ 6 直線アレンジメントは 4 種類に、7 直線アレンジメントは 14 種類に分類されることが解っている [10][11][12][13][14]。

8 直線配置になると頂点、辺、セルの数もより多くなり、7 直線の場合よりも複雑になる。我々は、この 8 直線の場合の幾何学的性質について調べてきた [3][4][5][6][7][8] が、まだアレンジメントの完全な分類には至っていない。

そこで我々は、計算幾何学で知られている定理を使い、与えられた 1 つの 7 直線配置に対し、貫通辺の組が互いに異なる可能なすべての貫通直線 (横断線) を確実に見つけるアルゴリズムを提案する。見つけ出した貫通直線を元の配置に加えることによって、元になった 7 直線アレンジメント内のセルの分割の仕方が互いに異なる 8 直線アレンジメントを生成することができる。もし、アレンジメントの異なる 11 種類の 7 直線配置代表サンプルすべてにこの横断線探索を行えば、得られた 8 直線アレンジメントは可能なすべての平面分割 (アレンジメント) を含んでいると期待できる。

本研究の目的は、異なった 7 直線配置代表サンプルすべてに対して、可能なすべての 8 直線アレンジメント生成実験を行い、分類することにある。

\*武庫川女子大学生活環境学部: fukui@mwu.mukogawa-u.ac.jp

†東京農工大学工学部: sekiguti@cc.tuat.ac.jp

## 2 8直線アレンジメントの生成実験

### 2.1 貫通直線の探索法とアレンジメントの生成

まず、平面上の点  $p$  と直線  $l$  との間の双対変換  $p : (a, b) \iff l : y = 2ax - b$  を  $\mathcal{D}$  とする。今、辺  $s$  と交叉する全ての直線の双対点の集合を  $\mathcal{D}(L_s) := \{\mathcal{D}(l) : \forall l \cap s \neq \emptyset\}$  とする。このとき、与えられた辺の組  $T$  に含まれるすべての辺を貫通する直線の双対変換は、次のような貫通領域  $S(T)$  上の1点であることが分かる (図1)。

$$S(T) := \bigcap_{s \in T} \mathcal{D}(L_s) \tag{1}$$

この、貫通領域  $S(T)$  には次の定理 [2] が成り立つことが知られている。

**定理 1 (H.Edelsbrunner)**  $T$  を平面内の  $n$  本の有界な線分の集合とする。 $S(T)$  は高々  $n + 1$  個の凸多角形の合併となる。ただし、この中には有界でないものがあるかもしれない。凸多角形は、どの2つの多角形も高々1点でしか交わらず、それら凸多角形を分離する垂直線が存在する。

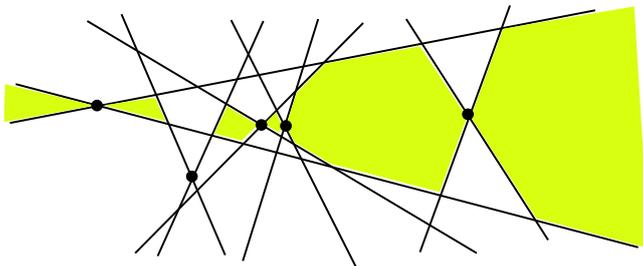


図 1: 与えられた辺の組  $T$  に対する貫通領域  $S(T)$

したがって、貫通直線 (横断線) を探索する問題は、貫通領域  $S(T)$  内の凸包を構成し、その凸包内の1点を選び出すアルゴリズムに帰着する [2]。

今、 $T$  を  $n$  個の辺の集合  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  とする。ここで、辺  $s_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は直線  $l_i$  上にあるものとし、端点を  $p_{1i}, p_{2i}$  とする。定理1にしたがって、双対平面が  $n$  本の垂直線  $x = \mathcal{D}(l_i)|_x$  ( $i = 1, \dots, n$ ) によって領域  $R_1, R_2, \dots, R_{n+1}$  へと分割されているとする (図2)。

さて、 $T$  に対する貫通直線を探索する手続きを以下に示す:

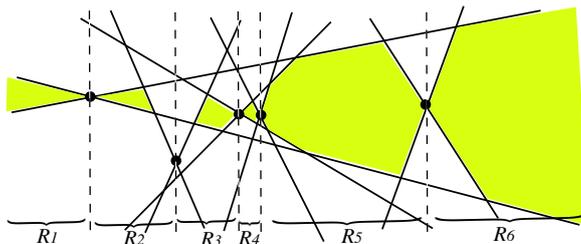


図 2: 貫通直線探索のための貫通領域と垂直線

### Algorithm 1 (貫通直線探索)

**入力:**  $n$  個の辺の集合  $T = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

**初期化:** 双対点  $\mathcal{D}(l_i)$  および双対直線  $\mathcal{D}(p_{1i})$  と  $\mathcal{D}(p_{2i})$  の交点を計算 ( $i = 1, \dots, n$ ).

**反復:**

for  $r := 1$  to  $n + 1$  do

凸多角形  $S_r := S(T) \cap R_r$  の上側・下側エンベロープを計算.

if  $S_r \neq \phi$  then

$S_r$  内部の代表点  $v$  を決定する,

$l_T := \mathcal{D}(v)$ , goto **出力**.

endif

endfor

$l_T := \phi$ .

**出力:** 貫通直線  $l_T$ .

一般に、実射影平面上の  $n$  直線アレンジメントには  $n(n-1)$  個の辺が存在する。したがって、アレンジメントに含まれる  $(n-1)^n$  通りの全ての辺の組  $T_j$  に対して、Algorithm 1 を繰り返せば、元のアレンジメントのセルの分割が異なる可能なすべての貫通直線を見つけることができる。これが本実験で行ったアレンジメント生成法である。

## 2.2 生成元の7直線配置

8直線アレンジメントの生成実験を行うために、7直線配置行列を定義しよう。ラベル付けされた7直線を  $(l_j)_{1 \leq j \leq 7}$  とし、 $l_j$  は次で定義されていると仮定する：

$$l_j : a_{1j}\xi + a_{2j}\eta + a_{3j}\zeta = 0. \quad (2)$$

ここで  $(\xi : \eta : \zeta)$  は  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  上の斉次座標である。この  $(l_j)$  に対し  $3 \times 7$  行列  $X \equiv (a_{ij})$ , ( $i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 7$ ) を定義する。このとき、単純アレンジメントの**条件 1, 2**は、 $X$  の3次小行列式がゼロでないことを保証している。この実  $3 \times 7$  行列  $X$  全体の集合を  $M'(3, 7)$  とおく。**条件 1, 2**に従う  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  上のラベル付けされた7直線の全体は次式で定義された配位空間  $P(2, 7)$  をつくる。

$$P(2, 7) = GL(3, \mathbf{R}) \setminus M'(3, 7) / (\mathbf{R}^\times)^7 \quad (3)$$

8直線アレンジメントの生成実験を行うためには、アレンジメントの異なる11種類の代表を使えば十分と思われるが、将来、Weyl群との関係を議論することを考慮し、14種類の連結成分に属する7直線配置を使用する。まず、この  $P(2, 7)$  に対して、文献 [12] に従って、Weyl群の作用を導入するために、次のような条件を考える。

**条件 3** どの6直線  $l_1, l_2, \dots, l_6$  も一つの円錐曲線に接しない。

これら、**条件 1, 2**および**3**に従う  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  上のラベル付けされた7直線の全体は  $P(2, 7)$  の部分集合となる。これを  $P_0(2, 7)$  と表す。さらに、 $\mathcal{P}_7$  を  $P_0(3, 7)$  の連結成分が作る集合とすると、 $\mathcal{P}_7$  上の  $W(E_7)$ -orbital 構造が決まり、14分解が存在する [12],[13],[15]。この14個の分解が7直線アレンジメントの分類パターン

に他ならない。ここでも文献 [15] に従って、これらのパターンを  $A, B_1, \dots, B_5, C_1, \dots, C_4, D_1, \dots, D_4$  と呼ぶことにする。本実験で使用したアレンジメントの異なる 14 タイプを代表する 7 直線配置 ( $3 \times 7$  行列) の定義を式 (4) に示す。

$$\begin{aligned}
X_A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & \frac{7}{5} \\ \frac{1}{20} & -2 & \frac{21}{10} & -12 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 9/10 & 1 & 1 & -6 & -1 \end{pmatrix} \\
X_{B_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{27}{37} & \frac{9}{10} & \frac{27}{26} & \frac{45}{184} \\ 1 & -16 & \frac{1}{20} & -\frac{729}{370} & -\frac{81}{10} & \frac{729}{1378} & -\frac{5265}{12328} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{3267}{370} & \frac{18}{5} & \frac{2133}{1040} & \frac{3069}{2392} \end{pmatrix} \\
X_{B_2} &= \begin{pmatrix} -\frac{21}{10} & -\frac{7}{10} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{8} \\ -\frac{133}{30} & -\frac{14}{15} & 1 & -16 & \frac{1}{20} & \frac{17}{40} & \frac{707}{644} \\ -\frac{7}{5} & -\frac{189}{370} & 1 & 1 & 1 & \frac{17}{90} & \frac{568}{568} \end{pmatrix} \\
X_{B_3} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{3}{7} & 0 & -\frac{3}{56} & -\frac{5}{14} \\ 1 & \frac{2}{5} & -16 & -\frac{93}{70} & \frac{1}{20} & -\frac{327}{1400} & -\frac{37}{108} \\ 1 & -\frac{1}{90} & 1 & -\frac{9}{70} & 1 & \frac{9}{2968} & -\frac{65}{3618} \end{pmatrix} \\
X_{B_4} &= \begin{pmatrix} \frac{33}{7} & 1 & \frac{110}{71} & 0 & \frac{11}{4} & -\frac{33}{37} & 0 \\ \frac{506}{91} & 1 & \frac{26455}{19596} & -16 & \frac{11}{17} & -\frac{1793}{1554} & \frac{1}{20} \\ -\frac{66}{35} & 1 & \frac{2627}{731} & 1 & \frac{93}{20} & -\frac{1850}{99} & 1 \end{pmatrix} \\
X_{B_5} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{17}{126} & -\frac{17}{267} & \frac{17}{37} & -\frac{17}{66} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{935}{1638} & -\frac{18547}{53667} & \frac{748}{259} & -\frac{119}{99} & -16 & \frac{1}{20} \\ 1 & \frac{731}{2520} & \frac{14151}{14151} & -\frac{185}{185} & \frac{1650}{1650} & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
X_{C_1} &= \begin{pmatrix} -\frac{18277}{9990} & \frac{18277}{1300} & -\frac{18277}{12000} & 0 & 1 & 0 & \frac{1430082}{271475} \\ -\frac{237601}{124875} & \frac{7073199}{509860} & -\frac{201047}{1332000} & \frac{1}{20} & 1 & -16 & \frac{26061337674}{4554210305} \\ -\frac{74227}{39960} & \frac{2936629}{210600} & -\frac{201793}{108000} & 1 & 1 & 1 & \frac{217408772193}{40452218275} \end{pmatrix} \\
X_{C_2} &= \begin{pmatrix} -\frac{37821817}{22152312} & \frac{340396353}{3107741} & -\frac{340396353}{74915750} & 0 & 0 & \frac{11252772}{6917183} & 1 \\ -\frac{154955984249}{58194123624} & \frac{4730715048543}{42315001456} & \frac{4074430879959}{4159472271500} & 20 & \frac{1}{20} & \frac{218725908600153}{114516413247782} & 1 \\ -\frac{156620144197}{81963554400} & \frac{208057815317}{1957876830} & -\frac{531320885216}{92858072125} & 1 & 1 & \frac{6948398538646}{3891503398055} & 1 \end{pmatrix} \\
X_{C_3} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{481}{31752} & \frac{715}{4704} & -\frac{3757}{133560} & -\frac{3757}{448560} & 0 & 1 \\ \frac{1}{80} & \frac{6253481}{748870920} & \frac{376805}{7396256} & -\frac{176579}{11886840} & -\frac{296803}{71321040} & -24 & 1 \\ 1 & -\frac{235902158999}{2868309077256} & -\frac{45785549095}{45692675616} & \frac{1794403}{12287520} & \frac{79313}{1345680} & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
X_{C_4} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{203320}{8167473} & -\frac{15045680}{227868633} & -\frac{1173}{4450} & 0 & -\frac{40664}{223713} & 0 \\ 1 & \frac{35568319}{6926017104} & -\frac{2958955315}{338157051372} & -\frac{950691}{24528400} & -16 & -\frac{65059}{1789704} & \frac{1}{20} \\ 1 & \frac{315938761}{7113868983} & -\frac{34625713730}{198473579343} & -\frac{17364939}{31007600} & 1 & -\frac{962387}{2908269} & 1 \end{pmatrix} \\
X_{D_1} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{59111150462045}{64246312480896} & 0 & -\frac{6997625}{42722316} & 1 & -\frac{180009643}{48825504} & \frac{11822230092409}{265805591688} \\ \frac{1}{20} & -\frac{131524615112918144755}{2194075817535079296} & -16 & -\frac{5673560875}{758321109} & 1 & \frac{892307800351}{9860507616} & \frac{5899292816112091}{39339227569824} \\ 1 & -\frac{291477827186045}{64246312480896} & 1 & -\frac{13722530329881339317125}{26768871641128144459932} & 1 & \frac{6312067094604268853369}{1779383684416172129568} & \frac{19304331701209}{265805591688} \end{pmatrix} \\
X_{D_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4865600}{1530419} & \frac{1093665240}{9878159} & -\frac{16010865}{6399934} & 0 & -\frac{2682162}{54295} \\ 1 & \frac{1}{20} & -\frac{188540400}{74990531} & \frac{652331905110}{5324327701} & -\frac{44880919980}{13955056087} & -16 & -\frac{6622509}{108590} \\ 1 & 1 & -\frac{5405402663680}{814322176129} & \frac{2833977178595412}{26280397502345} & -\frac{7243295127003}{3405347281994} & 1 & -\frac{11980728}{271475} \end{pmatrix} \\
X_{D_3} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{28}{43} & \frac{1}{50} & \frac{2}{5} & \frac{27}{40} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 2 & 8 & -25 & \frac{7}{5} & 5 & -5 & \frac{1}{40} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
X_{D_4} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{8}{5} & \frac{19}{20} & \frac{1}{5} & \frac{9}{10} \\ -16 & \frac{19}{10} & -\frac{59}{50} & \frac{137}{50} & 1 & \frac{1}{40} & \frac{53}{100} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}$$

## 2.3 計算結果

実際のアレンジメント生成および貫通直線探索には計算機 (PowerPC 1GHz) を使用し、アルゴリズムのインプリメントには Mathematica4.2 を使用した。

### 2.3.1 生成元別貫通直線探索結果

生成元 (4) からは 1974 個の 8 直線アレンジメントを生成した。生成元のタイプ別の貫通直線探索結果を表 1 に示す。

表 1: 生成元サンプル (4) によるタイプ別の探索された貫通直線の数

7直線のタイプ	A	B1	B2	B3	B4	B5	C1	C2	C3	C4	D1	D2	D3	D4	total
貫通直線存在数	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	1974

興味深いのは、どのタイプのアレンジメントを生成元としても 141 通りの貫通直線が存在したことである。このことは予想外であり、一つの発見である。

### 2.3.2 多角形隣接関係

まず、 $n$  本直線によって作られる  $p$ -多角形を定義しよう。 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}) - \cup_{j=1}^n l_j$  の各連結成分を多角形と呼ぶ。多角形が  $p$  個の直線で囲まれているとき、その多角形を  $p$ -多角形と呼ぶ。例えば、7 直線アレンジメントでは、7 角形から 3 角形までの多角形数分布の違いが 9 種類であることが分かる (表 2)。

計算結果の分類を行うための幾何学的特徴として、多角形に隣接している多角形の情報と定義しよう。 $n$  直線アレンジメントを  $\mathcal{A}$  とすると、 $M = \frac{n(n-1)}{2} + 1$  個の多角形が存在する。それらを  $\Sigma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) で表そう。もし、 $\Sigma_j$  が  $p$ -多角形ならば、 $\Sigma_j$  と隣接する (共有辺を持つ)  $p$  個の多角形  $\Sigma_{j_1}, \dots, \Sigma_{j_p}$  が存在する。いま、各  $\Sigma_{j_k}$  が  $N_{j_k}$ -多角形 ( $k = 1, \dots, p$ ) であるとして、リスト  $R_{\Sigma_j} = \{N_{j_1}, \dots, N_{j_p}\}$  を定義する。このとき  $N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_p$  となるように並べるものとする。この  $R_{\Sigma_j}$  を以後、 $p$ -多角形  $\Sigma_j$  の隣接多角形リストと呼ぶことにする。

**定義 1** アレンジメント  $\mathcal{A}$  に含まれる全ての多角形  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_M$  の隣接多角形リストを辞書式順序で並べたリスト  $R(\mathcal{A}) = \{R_{\Sigma_1}, R_{\Sigma_2}, \dots, R_{\Sigma_M}\}$  を  $\mathcal{A}$  における多角形どうしの隣接関係と呼ぶ。

例えば、単純な 7 直線アレンジメントは多角形どうしの隣接関係が異なる 11 種類のパターンに分類できる (表 2)。このことは、Grünbaum [9] の分類に一致する。タイプ C2 と D2 (同様に C4, D1 と D4) は条件 3 と関係しており区別できないが、本研究では議論しない。

表 2: 11 種類の多角形どうしの隣接関係

多角形隣接関係	7-gon	6-gon	5-gon	4-gon	3-gon
$R(\mathcal{A}_A)$	0	0	6	6	10
$R(\mathcal{A}_{B1})$	0	0	3	12	7
$R(\mathcal{A}_{D3})$	0	0	3	12	7
$R(\mathcal{A}_{B2})$	0	0	5	8	9
$R(\mathcal{A}_{B3})$	0	0	4	10	8
$R(\mathcal{A}_{B4})$	0	0	4	10	8
$R(\mathcal{A}_{B5})$	0	1	5	5	11
$R(\mathcal{A}_{C1})$	1	0	0	14	7
$R(\mathcal{A}_{C2}) = R(\mathcal{A}_{D2})$	0	1	1	13	7
$R(\mathcal{A}_{C3})$	0	1	3	9	9
$R(\mathcal{A}_{C4}) = R(\mathcal{A}_{D1}) = R(\mathcal{A}_{D4})$	0	1	2	11	8

### 2.3.3 多角形どうしの隣接関係による分類

サンプル (4) を生成元として、生成された 8 直線アレンジメントには、8 角形から 3 角形までの多角形数分布の違いによって 28 種類、多角形どうしの隣接関係の違いによって 135 種類観測された。これらを表 3 に示す。この結果は、以前の実験的探索 [8] と同じとなった。表は 4 段を 2 列に組まれており、135 種類の

表 3: サンプル (4) より生成された 8 直線アレンジメントの集計結果

$R(A)$  は 135 種類の多角形どうしの隣接関係の違いを表す番号、(a) は多角形数分布の (通し番号) とリスト

$R(A)$	(a) Numbers of 8,7,6,5,4,3-gon						
1	(1) 0,0,0,4,17,8	35		69		103	
2		36		70		104	
3		37		71		105	
4		38		72		106	(13) 0,0,1,8,6,14
5	(2) 0,0,0,5,15,9	39		73		107	(14) 0,0,2,0,19,8
6		40		74		108	(15) 0,0,2,1,17,9
7		41		75		109	
8		42		76		110	(16) 0,0,2,2,15,10
9		43	(5) 0,0,0,8,9,12	77		111	
10		44		78		112	
11		45		79		113	(17) 0,0,2,3,13,11
12		46		80		114	(18) 0,0,2,4,11,12
13		47		81	(10) 0,0,1,5,12,11	115	
14		48*	(6) 0,0,0,9,7,13	82		116	
15		49	(7) 0,0,1,2,18,8	83		117	
16		50		84		118	
17		51		85		119	
18		52		86		120	(19) 0,0,2,5,9,13
19	(3) 0,0,0,6,13,10	53	(8) 0,0,1,3,16,9	87		121	
20*		54		88		122	
21		55		89		123	(20) 0,0,2,6,7,14
22		56		90		124	
23		57		91	(11) 0,0,1,6,10,12	125	(21) 0,0,2,7,5,15
24		58		92		126	(22) 0,0,3,6,4,16
25		59		93		127	(23) 0,1,0,1,19,8
26		60		94		128	(24) 0,1,0,2,17,9
27		61		95		129	
28		62		96		130	(25) 0,1,0,3,15,10
29		63		97		131	(26) 0,1,0,5,11,12
30		64		98		132	
31		65		99		133	
32		66		100	(12) 0,0,1,7,8,13	134	(27) 0,1,0,7,7,14
33	(4) 0,0,0,7,11,11	67	(9) 0,0,1,4,14,10	101		135	(28) 1,0,0,0,20,8
34		68		102			

多角形どうしの隣接関係  $R(A)$  に対する (a) 多角形数分布を表している。ただし、(a) 列の括弧内の番号は 28 種類の多角形数分布を識別する通し番号である。

### 3 まとめ

計算幾何学で知られている貫通直線探索法を応用し、アレンジメントの異なる 14 通りの 7 直線配置サンプル (4) から、可能な全ての辺の組合せによる貫通直線を確実に探索し、8 直線アレンジメントの生成実験を行った。得られた観測結果について列記する：

1. サンプル (4) のどの 14 タイプからも 141 通りの貫通直線が存在した (表 1)。
2. 生成された 8 直線配置には多角形数分布の違いによって 28 種類、多角形どうしの隣接関係の違いによって 135 種類観測された (表 3)。

以上の結果は、次の新たな問題を残す：

- 1 つの 7 直線アレンジメントに存在する貫通直線の上限は 141 通りなのか？  
また、生成元のサンプルによって 141 通りより少ない場合があるか？

これらの問題については、今後の課題としたい。

## 参考文献

- [1] N. Bourbaki: Groupes et Algèbre de Lie Chap. IV-VI, *Hermann*, Paris, 1968.
- [2] H. Edelsbrunner: Algorithms in Combinatorial Geometry, *Springer*, Heidelberg, 1987.
- [3] T. Fukui and J. Sekiguchi: A remark on labelled 8 lines on the real projective plane, *Reports of Faculty of Science*, Himeji Inst. Tech. , **8** ,1997,1–11.
- [4] 福井哲夫, 関口次郎: 数式処理の実射影平面上  $N$  本直線配置問題への応用事例, 数理解析研究所講究録, **1030**, 1998, 62–74.
- [5] 関口次郎, 福井哲夫: 実射影平面上の 8 直線アレンジメント I, 数式処理, **7**(1), 1998, 33–35.
- [6] 福井哲夫, 関口次郎: 実射影平面上の 8 直線アレンジメント II: 構成実験の分析, 数式処理, **7**(1), 1998, 36–38.
- [7] T. Fukui and J. Sekiguchi: Eight lines arrangements on the real projective plane and the root system of type  $E_8$ , *Proc. ATCM '98*, Springer, Singapore, 1998, 377–388.
- [8] T. Fukui and J. Sekiguchi: Experimental computation on configurations of eight lines on the real projective plane, *Reports of Faculty of Science*, Himeji Inst. Tech. , **9** ,1998, 1–11.
- [9] B. Grünbaum: Convex Polytopes, *Interscience*, 1967, Chap.18.
- [10] J. Sekiguchi: Cross ratio varieties for root systems, *Kyushu J. Math.*, **48**, 1994, 123–168.
- [11] J. Sekiguchi: Cross ratio varieties for root systems II: the case of the root system of type  $E_7$ , *Kyushu J. Math.*, **54**(1), 2000, 7–37.
- [12] J. Sekiguchi: Geometry of 7 lines on the real projective plane and the root system of type  $E_7$ , *RIMS Kokyuroku*, **986**, 1997, 1–8.
- [13] J. Sekiguchi and T. Tanabata: Tetradiagrams for the root system of type  $E_7$  and its application, *Reports of Faculty of Science*, Himeji Inst. Tech., **7**, 1996, 1–10.
- [14] J. Sekiguchi and M. Yoshida: The  $W(E_6)$ -action on the configuration space of six points of the real projective plane, *Kyushu J. Math.*, **51**, 1997, 297–354.
- [15] J. Sekiguchi: Configurations of seven lines on the real projective plane and the root system of type  $E_7$ , *J. Math. Soc. Japan*, **51**(4), 1999, 987–1013.