非斉次有理近似アルゴリズムについて

安富　真一

(Shin-ichi Yasutomi)

鈴鹿工業高等専門学校

(Suzuka National Colege of Technology)

1　最初に

$\alpha > 0$ を無理数とし,$q, p \in \mathbb{Z}$ を見つけ $|q\alpha - p|$ を小さくできるかという問題を考える。いわゆる有理数による数の近似問題である。このような p, q は、連分数アルゴリズムによって求められることはよく知られた事実である。すなわち

$I = [0,1]$ とする。I 上の変換 T を $T(x) = \dfrac{1}{x} - a(x)$ で定義する。ただし $a(x) = \lfloor x \rfloor$。

$x_n = T^{n-1}(x)$,$a_n = a(x)$ とする。

各 n に対して q_n, p_n を次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

$$\frac{p_n}{q_n} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

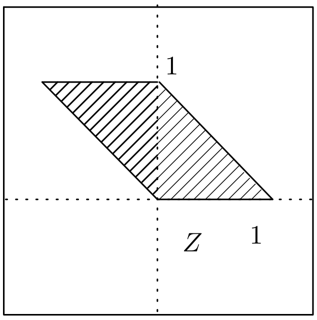
すると、次の定理はよく知られている。すなわち連分数から得られる p_n, q_n は最良近似を与える。

定理. $q > 0$ を自然数とする。n を $q_n \leq q < q_{n+1}$ を満たす整数とする。このとき、任意の整数 p に対して $|q\alpha - p| \geqq |q_n\alpha - p_n| > |q_{n+1}\alpha - p_{n+1}|$。

定理. q を整数とし、実数 z に対して $\|z\| = \min\{|z - m||m \in \mathbb{Z}$ とする。

$$\liminf_{q \to \infty} q\|q\alpha\| = \liminf_{n \to \infty} q_n|q_n\alpha - p_n|.$$

α を無理数とし,$q, p \in \mathbb{Z}$ のとき $|q\alpha + p + \beta|$ を如何に小さくできるかという問題を考える。この問題は非斉次有理近似問題と言われている。ある $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して $\beta = m\alpha + n$ のときは、すぐ分かるように通常の有理近似問題になるので任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して $\beta \neq m\alpha + n$ とする。通常の有理近似と連分数が関係があるように非斉次有理近似問題に対してもさまざまなアルゴリズムが考察されてきた。例えば Khintchine [11], 森本 [16], Koksma [12], Davenport [6, 7], Barnes [1], Barnes and Swinnerton-Dyer [2, 3],Cassels [4], Decombes [8], Soś [18], 伊藤, 笠原 [10], Cusick et al [5] および 小松 [14, 13] などである。伊藤, 笠原 [10] は森本の研究 [16] 受けて、次のようなアルゴリズムを提案した。$Z = \{(x, y) | 0 \leqq y < 1, -y < x < -y + 1\}$.



Z

$(x, y) \in Z$ に対して

$$a'(x, y) = \lfloor \frac{1-y}{x} \rfloor - \lfloor \frac{-y}{x} \rfloor, \quad b'(x, y) = -\lfloor \frac{-y}{x} \rfloor.$$

T_1 は、次の Z 上の変換とする。$(x, y) \in Z$ に対して,

$$T_1(x, y) = (\frac{1}{x} - a'(x, y), b'(x, y) - \frac{y}{x}).$$

力学系 (Z, T_1) から連分数と同様に近似アルゴリズムが構成される。伊藤, 笠原は、このアルゴリズムが、非斉次有理近似問題に有効であることを示した。また、彼らは、力学系 (Z, T_1) に対していわゆる Natural extension を構成し、それを利用して、$\liminf_{q\to\infty} q|q\alpha + \beta - p|$ への応用と周期点の決定を行った。有理数近似のアルゴリズムに対して Natural extension を構成し周期点の決定や不変測度を求める手法は、伊藤俊次 [9] の研究を嚆矢とする。多くの非斉次有理近似アルゴリズムが存在するのは、奇妙な感じがするが大半のアルゴリズムでは $q|q\alpha + \beta - p|$ を最良にする $(p.q)$ は、アルゴリズムから定まる複数の系列の中に存在するという述べられ方をされていて、それが多くのアルゴリズムが生じる理由であると思われる。この辺りは連分数とは異なるところであり、またおもしろいところである。今までの例は、力学系から定まるアルゴリズムであるが、力学系が陽に現れないアルゴリズムも存在する。例えば、小松 [13] は次のアルゴリズムを導入した。p_n, q_n に対して p_n^*, q_n^* を以下のように定義する。$0 \leqq q_n^* < q_n$,

$$|q_n^* x - y - p_n^*| = \min\{|qx - y - p| \; |0 < q \leqq q_n\}.$$

このとき

$$\liminf_{q\to\infty} q|qx - p - y| = \liminf_{n\to\infty} q_n^* |q_n^* x - p_n^* - y|.$$

また、

$$q_n^* = \{\frac{(-1)^n q_{n-1} \lfloor -q_n x \rfloor + t}{q_n}\} q_n.$$

ここで $t=-1,0,1$ のどれか。この報告集では、力学系が陽に現れるアルゴリズムを考察することにする。
小松 [14] は、西岡、塩川、田村 [17] の提案した次のアルゴリズムをを研究した。$(x,y)\in[0,1]^2$ に対して,

$$T_2(x,y)=(\frac{1}{x}-\lfloor\frac{1}{x}\rfloor,\lceil\frac{y}{x}\rceil-\frac{y}{x}).$$

力学系 $([0,1]^2,T_2)$ に対して連分数と同様にして近似アルゴリズムが構成される。小松 [14] は、このアルゴリズムが $\liminf_{q\to\infty}q|q\alpha+\beta-p|$ の計算に有効であることを示し、小松 [15] では、周期点に収束する点の決定を行っている。しかしながら残念なことに純周期点の決定は今のところなされていないし、力学系 $([0,1]^2,T_2)$ に対して Natural extension も構成されていない。筆者は、容易に力学系 $([0,1]^2,T_2)$ の Natural extension が構成できるのではないかと考えたのだが、残念ながら構成は難しいようである。そこで、力学系 $([0,1]^2,T_2)$ を多少変えた力学系 $([0,1]^2,T)$（後述）を考察し、その Natural extension が容易に求まることが分かった。また力学系 $([0,1]^2,T)$ も力学系 $([0,1]^2,T_2)$ と同程度以上に非斉次有理近似に有効であることが分かった。以下の章ではその概要を述べたい。

2　アルゴリズムとその性質

$X=[0,1]^2$ とする。$(x,y)\in X$ で $x\neq 0$ とする。次のように $a(x),b(x,y)$ を定義する。$a(x)=\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$,

$$b(x,y)=\begin{cases}1 & \text{if y=0},\\ \lceil\frac{y}{x}\rceil & \text{if } y>0 \text{ and } \lfloor\frac{1}{x}\rfloor>\lfloor\frac{y}{x}\rfloor \text{ or } \lfloor\frac{1}{x}\rfloor=\frac{y}{x},\\ 0 & \text{if } \lfloor\frac{1}{x}\rfloor=\lfloor\frac{y}{x}\rfloor \text{ and } \lfloor\frac{1}{x}\rfloor\neq\frac{y}{x}.\end{cases}$$

X 上の変換 T を次のように定義する。$(x,y)\in X$ に対して $x>0$ ならば

$$T(x,y)=\begin{cases}(\frac{1}{x}-a(x),b(x,y)-\frac{y}{x}) & \text{if } b(x,y)>0,\\ (\frac{1}{x}-a(x),\frac{1}{x}-\frac{y}{x}) & \text{if } b(x,y)=0,\end{cases}$$

$x=0$ に対しては, then $T(x,y)=(x,y)$.
また $a_n(x)=a(T^{n-1}(x,y))$, $b_n(x,y)=b(T^{n-1}(x,y))$ および $(x_n,y_n)=T^{n-1}(x,y)$ とする。もし $x\notin\mathbb{Q}$ ならば、任意の $n>0$ に対して $a_n(x)$ と $b_n(x,y)$ が定義されることは容易に見て取れる。
$a_n(x)$ と $b_n(x,y)$ たちによって (x,y) は一意に決まる。すなわち

補題 1. Let $(x,y),(z,w)\in X$ および $x,z\notin\mathbb{Q}$ とする。もし $a_n(x)=a_n(z)$　および 任意の自然数 $n>0$ に対して $b_n(x,y)=b_n(z,w)$　であるならば, このとき $(x,y)=(z,w)$.

補題 1 により、(x,y) と数列 $\{a_n(x)\}_{n=1,2,\ldots},\{b_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ を同一視する。すなわち

$$(x,y)\longleftrightarrow\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots\\ b_1 & b_2 & \cdots\end{pmatrix}.$$

例

$$(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{1}{2}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

一見すると複雑になったような感じであるが、実は後述するように自然なアルゴリズムである。さて次は数列 $\{a_n(x)\}$ と $\{b_n(x,y)\}$ の性質である。

補題 2. $(x,y) \in X$ **に対して**, **任意の自然数** n **に対して**

1. $a_n(x) > 0$ **および** $a_n(x) \geq b_n(x,y) \geq 0$,
2. **もし** $b_n(x,y) = 0$, **ならば** $b_{n+1}(x,y) = 1$.

今、Ψ を次のように定義する。$\Psi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \notin \mathbb{Q} \text{ and } y \neq mx+n \text{ for any } m,n \in \mathbb{Z}\}$.
前の補題の逆は一般的にには言えないが、ほぼ成立している。次の補題が解答である。

補題 3. $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ を次の性質を満たす数列とする。$n > 0$ に対して

1. $a_n > 0$ and $a_n \geq b_n \geq 0$,
2. if $b_n = 0$, then $b_{n+1} = 1$,
3. if $b_n = 0$, then there exists an integer $k > 0$ such that $b_{n+2k} > 0$,
4. if $a_n = b_n$, then there exists an integer $k > 0$ such that $a_{n+k} \neq b_{n+k}$.

このとき $(x,y) \in X \cap \Psi$ が存在して $a_n = a_n(x)$ および $b_n = b_n(x,y)$.

いわゆる中間近似分数を定義しよう。$(x,y) \in X$ および $x \notin \mathbb{Q}$ とする. 次のようにして $A_n(x,y), B_n(x,y)$ を定義する。:

$$A_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } b(x,y) > 0, \\ -1 & \text{if } b(x,y) = 0. \end{cases} \qquad B_1(x,y) = \begin{cases} b_1(x,y) & \text{if } b(x,y) > 0, \\ 0 & \text{if } b(x,y) = 0, \end{cases}$$

$n > 1$ に対して

$$A_n(x,y) = \begin{cases} A_{n-1}(x,y) + b_n(x,y) q_{n-1}(x) & \text{if } b(x,y) > 0, \\ A_{n-1}(x,y) - p_{n-2}(x) & \text{if } b(x,y) = 0, \end{cases}$$

$$B_n(x,y) = \begin{cases} B_{n-1}(x,y) + b_n(x,y) p_{n-1}(x) & \text{if } b(x,y) > 0, \\ B_{n-1}(x,y) - q_{n-2}(x) & \text{if } b(x,y) = 0, \end{cases}$$

ここで $\{p_n(x)\}_{-1\le n}, \{q_n(x)\}_{-1\le n}$ は次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
&p_{-1}(x) = 1,\ p_0(x) = 0,\\
&q_{-1}(x) = 0,\ q_0(x) = 1,\\
&\text{for } n \ge 1\\
&p_n(x) = a_n(x)p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x),\\
&q_n(x) = a_n(x)q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x).
\end{aligned}
$$

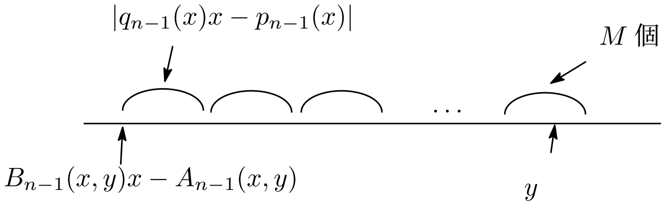
$\{B_n(x,y)\}_{n=1,2,\ldots}$ および $\{A_n(x,y)\}_{n=1,2,\ldots}$ は必ずしも増加列ではないことに注意しておく。
このとき次の補題が成立する。

補題 4. $(x,y) \in X$ および $x \notin \mathbb{Q}$. このとき, $n > 0$ に対して

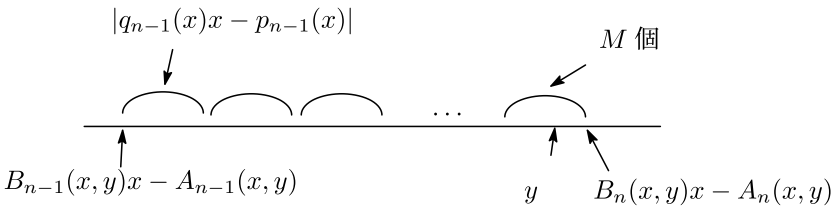
$$y = B_n(x,y)x - A_n(x,y) + (-1)^n y_{n+1} x_1 \cdots x_n. \tag{1}$$

このアルゴリズムは、定義は複雑のように思われるが、実は次のような仕組みで $B_n(x,y), A_n(x,y)$ 決められていく。

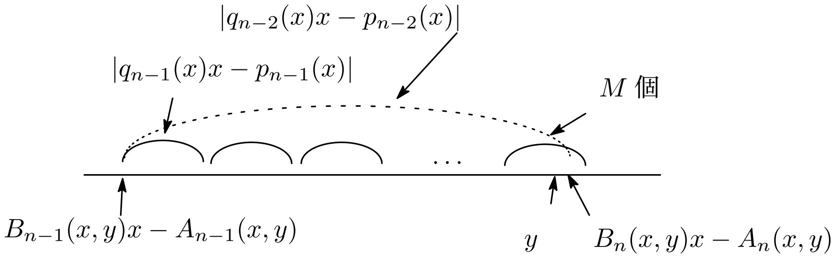
今 n を奇数とする。$B_{n-1}(x,y)x - A_{n-1}(x,y)$ まで決まったとする。下の図のように $B_{n-1}(x,y)x - A_{n-1}(x,y)$ から $|q_{n-1}(x)x - p_{n-1}(x)|$ の幅で y の方向へ取っていき y をはじめて通り越すまでとる。その個数 (M とおく) は帰納的に $a_n(x) + 1$ 以下であることが分かりもし $M \le a_n(x)$ であればその点を $B_n(x,y)x - A_n(x,y)$ とする。また $M = a_n(x) + 1$ であれば $B_{n-1}(x,y)x - A_{n-1}(x,y)$ から $|q_{n-2}(x)x - p_{n-2}(x)|$ の幅で y の方向へ取った点を $B_n(x,y)x - A_n(x,y)$ とする。



$M \le a_n(x)$ のとき



$M = a_n(x) + 1$ のとき



このアルゴリズムはある意味で最良近似を与える。

定理 1. $(x,y) \in X \cap \Psi$ とする。ただし、$\Psi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \notin \mathbb{Q} \text{ and } y \neq mx+n \text{ for any } m,n \in \mathbb{Z}\}$ とする. $n > 0$ が奇数ならば, $B_n(x,y)x - A_n(x,y) - y > 0$ であり、任意の整数 m, j 整数で $0 < m < B_n(x,y)$ を満たすものについてもし $mx - j - y > 0$ であれば,

$$B_n(x,y)x - A_n(x,y) - y < mx - j - y.$$

が成立する。また $n > 0$ が偶数であれば, $B_n(x,y)x - A_n(x,y) - y < 0$ でありもし $mx - j - y < 0$ であれば,

$$B_n(x,y)x - A_n(x,y) - y > mx - y - j.$$

が成立する。

次の定理は、小松氏が T_2 について示された結果 [14] に対応するもので、証明も同様になされる。

定理 2. $(x,y) \in X \cap \Psi$ とする.

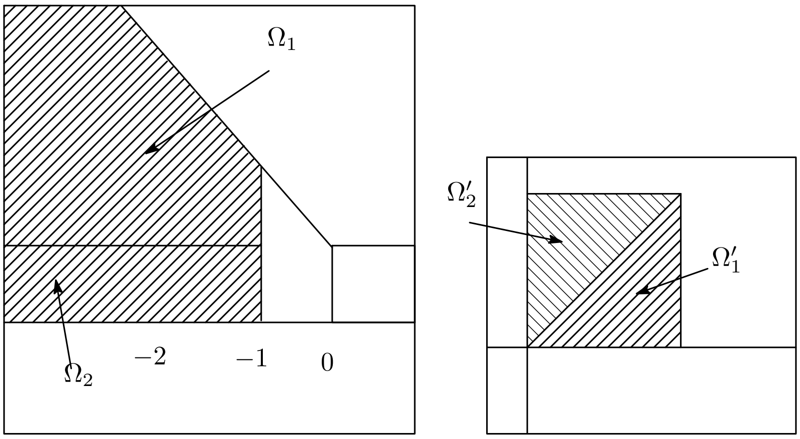
$$\begin{aligned}
&\liminf_{q\to\infty} q\|qx - y\| \\
&= \liminf_{n\to\infty} \min\{B_n(x,y)|B_n(x,y)x - A_n(x,y) - y|, \\
&\tau(B_n(x,y) - q_{n-1}(x))|(B_n(x,y) - q_{n-1}(x))x - (A_{n-1}(x,y) - p_n(x)) - y|\},
\end{aligned}$$

ここで $q \in \mathbb{Z}$ および $u > 0$ に対して $\tau(u) = u$、また、$u \leq 0$ に対して $\tau(u) = \infty$.

3 Natural Extension とその応用

領域 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1', \Omega_2'$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(x,y) | (x,y) \in \Psi, y > 1, x \leq -1, y \leq -x+1\} \\
\Omega_2 &= \{(x,y) | (x,y) \in \Psi, 0 \leq y \leq 1, x \leq -1, \} \\
\Omega_1' &= \{(x,y) \in [0,1]^2 | (x,y) \in \Psi, y \leq x\} \\
\Omega_2' &= \{(x,y) \in [0,1]^2 | (x,y) \in \Psi, y > x\}
\end{aligned}$$



また $\Phi = [0,1]^2 \cap \Psi$ とする。Ω を $\Omega = \{\Omega'_1 \times (\Omega_1 \cup \Omega_2)\} \cup (\Omega'_2 \times \Omega_1)$ と定義する.
Ω 上の変換 $\bar{T}$ を次のように定義する。

$(x,y,z,w) \in \Omega$ に対して

$$\bar{T}(x,y) = \begin{cases} (\frac{1}{x} - a(x), b(x,y) - \frac{y}{x}, \frac{1}{z} - a(x), b(x,y) - \frac{w}{z}) & \text{if } b(x,y) > 0, \\ (\frac{1}{x} - a(x), \frac{1}{x} - \frac{y}{x}, \frac{1}{z} - a(x), \frac{1}{z} - \frac{w}{z}) & \text{if } b(x,y) = 0, \end{cases}$$

このとき $(\Omega, \bar{T})$ は、(X,T) の Natural Extension になっている。すなわち

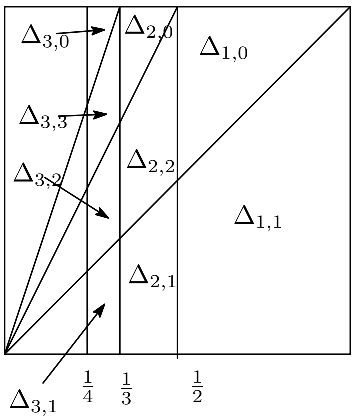
補題 5. $\bar{T}$ は同型写像になる.

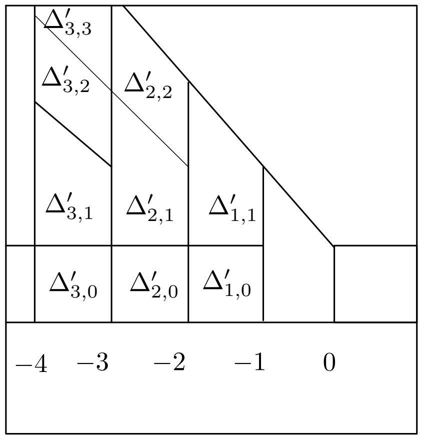
この補題は重要なので、証明を以下に与える。
整数の組 (m,n) に対して $X \cap \Psi$ の分割 $\Delta_{m,n}$ を次のように定義する。ただし、$m \geq n, m \geq 1, n \geq 0$。

$$\Delta_{m,n} = \begin{cases} \{(x,y) \in X \cap \Psi | \frac{1}{m+1} < x < \frac{1}{m}, (n-1)x < y < nx\} & \text{if } n > 1, \\ \{(x,y) \in X \cap \Psi | \frac{1}{m+1} < x < \frac{1}{m}, y > mx\} & \text{if } m \geq n \ \text{ and } n = 0. \end{cases}$$

同様にして $\Delta'_{m,n}$ を次のように定義する。

$$\Delta'_{m,n} = \begin{cases} \{(x,y) \in \Omega'_1 | -(m+1) < x < -m, 1 < y < -x-m+2\} & \text{if } n = 1, \\ \{(x,y) \in \Omega'_1 | -(m+1) < x < -m, -x-m+n < y < -x-m+n+1\} & \text{if } n > 1, \\ \{(x,y) \in \Omega'_2 | -(m+1) < x < -m\} & \text{if } n = 0. \end{cases}$$





次のことは容易に示される。

$$\begin{aligned}\Omega &= \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+, m\geq n, n\neq 1} \Delta_{m,n}\times\Omega_1' \cup \bigcup_{m\in\mathbb{Z}_+} \Delta_{m,1}\times(\Omega_1'\cup\Omega_2') \cup \bigcup_{m\in\mathbb{Z}_+} \Delta_{m,0}\times\Omega_1' \quad \text{(disjoint)} \\ &= \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+, m\geq n, n\neq 1} (X\cap\Psi)\times\Delta'_{m,n} \cup \bigcup_{m\in\mathbb{Z}_+} (X\cap\Psi)\times\Delta'_{m,1} \cup \bigcup_{m\in\mathbb{Z}_+} \Omega_1\times\Delta'_{m,0} \quad \text{(disjoint)}.\end{aligned}$$

ここで、$(m,n)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ with $n\neq 1$ に対して $\bar{T}_{\Delta_{m,n}\times\Omega_1'}\Delta_{m,n}\times\Omega_1'\to(X\cap\Psi)\times\Delta'_{m,n}$ 同型写像であり、$\bar{T}_{\Delta_{m,1}\times(\Omega_1'\cup\Omega_2')}\Delta_{m,1}\times(\Omega_1'\cup\Omega_2')\to(X\cap\Psi)\times\Delta'_{m,1}$ for $m\in\mathbb{Z}_+$ および $\bar{T}_{\Delta_{m,0}\times\Omega_1'}\Delta_{m,0}\times\Omega_1'\to\Omega_1\times\Delta'_{m,0}$ も同型写像である。以上より補題 5 が従う。

この補題 5 を用いて (X,T) における純周期点を決定することができる。

定理 3

1. $(x,y)\in\Phi$ とする。x 2 次無理数とし、 $y\in\mathbb{Q}(x)$ であることは、(x,y) が T に関してあるところから周期的になるための必要十分条件となる。

2. $(x,y)\in\Phi$ とする。x 2 次無理数とし、 $y\in\mathbb{Q}(x)$ かつ $(x,y,\bar{x},\bar{y})\in\Omega$ であることは、(x,y) が T に関して純周期になるための必要十分条件となる。

アルゴリズム (X,T_1) に関して定理 3 の１．にあたることは、小松 [15] で示されている。

この Natural Extension を用いて 2 次体の数の場合近似の程度を表す量を比較的簡明な式で表すことができる。

定理 4. $(\alpha,\beta)\in\Phi$. x 2 次無理数とし、$y\in\mathbb{Q}(\alpha)$ とする。このとき

$$\lim_{q\to\infty} q\|q\alpha-\beta\| = Min\{\frac{\beta_n(\beta_n)'}{\alpha_n-(\alpha_n)'}, \frac{|(1-\beta_n)(\beta_n-1)'|}{\alpha_n-(\alpha_n)'}; n\geq m\},$$

ここで (α_m,β_m) は純周期点とし、$(\alpha_n,\beta_n)=T^{n-1}(\alpha,\beta)$ とし $v\in\mathbb{Q}(\alpha)$ に対して v' は v の代数的共役とする。、

現時点でこのアルゴリズムは多くの非斉次有理近似アルゴリズムの中のひとつにしかすぎない。これを用いて数論的に興味ある結果を導いて、ようやくこのアルゴリズムの優位性が示されると思う。その課題として、通常の有理近似の場合の Lagrange スペクトラムにあたるものの解明をしていきたいと思っている。この方向は、いまだ研究も緒についたばかりである。非斉次の場合アルゴリズムの解明が進んでいなかったのがその原因のひとつと思われる。

参考文献

[1] E.S. Barnes, The inhomogeneous minima of binary quadratic forms. IV, Acta Math. 92, 235-264 (1954).

[2] E.S. Barnes and H.P.F. Swinnerton-Dyer, The inhomogeneous minima of binary quadratic forms. I, Acta Math. 87, 259-323 (1952).

[3] E.S. Barnes and H.P.F. Swinnerton-Dyer, The inhomogeneous minima of binary quadratic forms. III, Acta. Math. 92, 199-234 (1954).

[4] J.W.S. Cassels,Über $\lim_{x\to+\infty} x|\vartheta x+\alpha-y|$, (German) Math. Ann. 127, 288-304 (1954).

[5] T.W.Cusick, A.M.Rockett, P. Szüsz, On inhomogeneous diophantine approximation,J. Number Theory 48, No.3, 259-283 (1994).

[6] H,Davenport,Non-homogeneous binary quadratic forms. IV,Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 741-749, 909-917 (1947).

[7] H.Davenport,On a theorem of Khintchine,Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser. 52, 65-80 (1950).

[8] R.Descombes, Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée,Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., III. Sér. 73, 283-355 (1956).

[9] S.Ito,Some skew product transformations associated with continued fractions and their invariant measures, Tokyo J. Math. 9, no. 1, 115-133(1986)

[10] S.Ito, K.Kasahara, On Morimoto algorithm in Diophantine approximation, Tokyo J 14 no2 357-393(1991)

[11] S,Ito, H,Tachii, A Diophantine algorithm and a reduction theory of ternary forms, Tokyo J. Math. 16, no. 2, 261-289(1993).

[12] A.Y.Khintchine,Uber eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Rendiconti di Palermo 50, 170-195(1926).

[13] J.F. Koksma,Diophantische Approximationen,Julius Springer VIII, 157 S. (1936).

[14] T.Komatsu, On inhomogeneous continued fraction expansions and inhomogeneous Diophantine approximation, J. Number Theory 62, no. 1, 192-212(1997).

[15] T.Komatsu, On inhomogeneous Diophantine approximation and NST-algorithm, S.Kanemitsu, K,Gyory ed. Number Theory and its application, kluwer,235-243(1999)

[16] T.Komatsu,Substitution invariant inhomogeneous Beatty sequences, Tokyo J. Math. 22, No.1, 235-243 (1999).

[17] S.Morimoto,Ŭber die Grŏssennordung des absoluten Betrages von einer linearen inhomogenen Form(II), Jap.J.Math.,3(1926)

[18] K.Nisioka, I.Shiokawa and J.Tamura, Arithmetrical propertise of a certain power series,J.Number Theory, 42.No.1, 61-87(1992)

[19] V.T.Sós, On the theory of Diophantine approximations. II: Inhomogeneous problems,Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9, 229-241 (1958).

[20] S.Yasutomi, On A New Algorithm for Inhomogeneous Diophantine Approximation, submitted.