Codes and Hermitian Modular Forms

大浦　学
九州大学大学院数理学研究科

上半平面上の古典的な theta 関数は,

$$\theta \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (\tau) := \sum_{x \in \mathbf{Z}} \exp 2\pi i \{ \frac{1}{2} \tau (x+a)^2 + (x+a)b \}, \quad a, b \in \{0, 1\}$$

で定義される. 2 元体上の長さ n の self-dual doubly-even (または,Type II) コードの重み多項式 $W_C(x, y)$ に対して, $W_C(\theta \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] (2\tau), \theta \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right] (2\tau))$ は, $SL(2, \mathbf{Z})$ に関する重さ $n/2$ の modular form となることが知られている.

一方, self-dual doubly-even　コードの重み多項式は, 位数 192 の有限複素鏡映群の作用により不変である. 即ち, 任意の self-dual doubly-even コードの重み多項式は, その不変式環に含まれる. 実は, 3 つの環 (self-dual doubly-even コードに関する重み多項式環, 位数 192 の有限複素鏡映群の不変式環, $SL(2, \mathbf{Z})$ に関する重さが 4 の倍数の modular form 達のなす環) は本質的に同じであることが知られている. 特に次数 8, 24 の代数的独立な元により生成され, 次元公式は, $1/(1-t^8)(1-x^{24}) = 1 + t^8 + t^{16} + 2t^{24} + 2t^{32} + \cdots$ となる. (modular form の重さは, 対応する不変式の次数の 1/2 倍に相当する.)

ここでは, 上半空間を

$$\mathbf{H}_2 = \{ \tau \in GL(2, \mathbf{C}) | (\tau - \tau^*)/2i > 0 \} \quad \tau^* = {}^t\bar{\tau}$$

にかえた場合の theta 関数を考え, 先と同様な対応を考察し, コードから Hermitian modular form を構成する. ここで扱う theta 関数や Hermitian modular form に関しては、[2], [3], [4] を参照していただきたい. Theta 関数を

$$\Theta \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (\tau) := \sum_{n \in \mathbf{Z}[i]^2} \exp 2\pi i \{ \frac{1}{2} (x+a)^* \tau (x+a) + \mathrm{Re}(b^* n) \}, \tau \in \mathbf{H}_2, a, b \in \frac{1}{2} \mathbf{Z}[i]^2$$

で定義する. [2], [4] で扱われている theta 関数$\theta(\tau; \mathbf{a}, \mathbf{b})$ とは, $\theta(\tau; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \Theta \left[\begin{array}{c} \frac{1+i}{2}\mathbf{a} \\ \frac{1+i}{2}\mathbf{b} \end{array} \right] (\tau), \ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^2$ で結ばれる. 変数に対する置換 T と群

$$U(2,2) = \left\{ g \in GL(4, \mathbf{C}); g^* J g = J = \left(\begin{array}{cc} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

は $I_{2,2}$ 型の有界対称領域 $\mathbf{H}_2$ に以下のように作用する.

$$\begin{aligned} T \cdot \tau &= {}^t\tau \\ g \cdot \tau &= (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1} \end{aligned}$$

ここで,

$$\Gamma := \{g \in GL(4, \mathbf{Z}[i]); g^* J g = J\}$$

とおく. Γ は, 3 つのタイプの元

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_2 & B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

で生成される. ここで, $A \in GL(2, \mathbf{Z}[i])$, $B = B^* \in \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbf{Z}[i])$ である. 故に, 関数の Γ による不変性等を調べる場合、この 3 タイプについてのみ調べればよい. 実は有限個の元で十分であることも知られている。

テータ関数は以下のような性質を持つ.

補題 **1** (i) $\Theta \begin{bmatrix} ia \\ ib \end{bmatrix} (\tau) = \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau)$.

(ii) $\Theta \begin{bmatrix} a+r \\ b+s \end{bmatrix} (\tau) = \exp[2\mathrm{Re}(b^* r)] \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau)$, ただし $r, s \in \mathbf{Z}[i]$.

(iii) $T \cdot \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau) = \exp[-4\ \mathrm{Re}({}^t a)\ \mathrm{Re}(b)] \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau)$.

(iv) $g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix}$, $A \in GL(2, R)$ の時,

$$g \cdot \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau) = \Theta \begin{bmatrix} A^* a \\ A^{-1} b \end{bmatrix} (\tau).$$

(v) $g = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = B^* \in \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbf{Z}[i])$ の時,

$$g \cdot \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau) = \exp[a^* B a] \Theta \begin{bmatrix} a \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (\tau), \tilde{b} = b + Ba + \frac{1}{1+i} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{pmatrix}.$$

(vi) $J \cdot \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau) = -\exp[2\pi i \mathrm{Re}(a^* b)] \det(\tau) \Theta \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} (\tau)$.

ここで $f_a(\tau) := \Theta \begin{bmatrix} 1/2a \\ 0 \end{bmatrix} (2\tau)$ とおく. $f_a(\tau)$ に対する変換公式は, 補題 1 から得られる. 次の恒等式はここでは利用しないが, 便利なので書いておく.

$$\Theta \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}b \end{bmatrix}^2 (\tau) = \sum_{p \in R^2} (-1)^{\mathrm{Re}\,(b^* p)} f_{a+p}(\tau) f_p(\tau).$$

以下では, あるよい性質のコードを定義し, この $f_a(\tau)$ を用いることで Hermitian modular form を構成する. まず最初に Hermitian modular form を定義する.

定義 **2** $\mathbf{H}_2$ 上の正則関数 f は,

$$\begin{aligned} T \cdot f(\tau) &= f(\tau) \\ g \cdot f(\tau) &= \det(C\tau + D)^k f(\tau) \quad {}^\forall g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma, \end{aligned}$$

満たすとき, Γ に関する重さ k の対称な *Hermitian modular form* という.

$R := \mathbf{Z}[i]/2\mathbf{Z}[i] = \{0, 1, i, 1+i\}$ とし, R^n の部分集合 C で R-加群となっているものを R 上長さ n の線形コードという. このレポートでは, 線形コードしか扱わないので, 単にコードと呼ぶ. コード C に対して, 双対コードを $C^\perp := \left\{ x \in R^n; \mathrm{Re}(x^* c) \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)^\forall c \in C \right\}$ で定義する. コード C が $C = C^\perp$ かつすべての元 c が $c^* c \equiv 0 (\mathrm{mod} 4)$ をみたす時, 特にコード C を Type II であると言う.

完全重み多項式とは,

$$W_C(x_a \text{ with } a \in R^2) := \sum_{c_1, c_2 \in C} \prod_{a \in R^2} x_a^{n_a(c_1, c_2)},$$

で定義される. ここで $n_a(c_1, c_2) = \sharp\{i; a = {}^t(c_{1i}, c_{2i})\}$ である. 以下, 簡単のため完全重み多項式を $W_C(x_a)$ と書く.

コード C 完全重み多項式は, 以下の恒等式により, 双対コードのそれと結ばれる.

命題 **3**

$$W_{C^\perp}(x_a) = \frac{1}{|C|^2} T \cdot W_C(x_a),$$

ここで, $T = \left((-1)^{\mathrm{Re}(a^* b)} \right)_{a,b \in R^2}$ である.

次にサイズ 16×16 の有限行列群

$$G := \langle -\frac{1}{4} T, \tilde{A}, D_B, iI_{16}; A \in GL(2, R), B = B^* \in \mathrm{Mat}(2, 2; R) \rangle,$$

を考える. ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{A} : &= (\delta_{b, A^* a})_{a,b \in R^2} \\ D_B : &= \mathrm{diag}(i^{a^* B a} \text{ with } a \in R^2). \end{aligned}$$

命題 **4** R 上の任意の *Type II code* C に対して, 完全重み多項式は, 有限群 G の作用により不変である.

$f_a(\tau) = f_{ia}(\tau)$ より $f_a(\tau)$ を多項式に代入することを考える場合、以下のような対称重み多項式を考えれば十分である. ここでは, 対称重み多項式を定義し, 完全重み多項式と同様の議論を行なう. まず, R^2 に次のような関係をいれる. R^2 の元 a, b に対して, $a = b$ もしくは $a = ib$ である時, $a \sim b$ と書く. これは, 同値関係であり, $\mathcal{S}^2 := R^2/\sim$ とおく. 以下では,R^2 の元 a に対し,$\bar{a} \in \mathcal{S}^2$ と書くこともある.

対称重み多項式とは,

$$S_C(x_{\bar{a}} \text{ with } \bar{a} \in \mathcal{S}^2) := \sum_{c_1,c_2 \in C} \prod_{\bar{a} \in \mathcal{S}^2} x_{\bar{a}}^{n_{\bar{a}}(c_1,c_2)},$$

で定義される. ここで, $n_{\bar{a}}(c_1,c_2) = \sharp\{i; \bar{a} = \overline{{}^t(c_{1i}, c_{2i})}\}$. 以下, 簡単のため, 対称重み多項式を $S_C(x_{\bar{a}})$ と書く.

命題 5

$$S_{C^\perp}(x_{\bar{a}}) = \frac{1}{|C|^2} T' \cdot S_C(x_{\bar{a}}),$$

ここで, $T' = \left(\sum_{d \in R^2 \text{with } \bar{b}=\bar{d}} (-1)^{\mathrm{Re}(a^* b)}\right)_{\bar{a},\bar{b} \in \mathcal{S}^2}$ である.

有限群 H を以下で定義する.

$$H := \langle -\frac{1}{4} T', \tilde{A}', D'_B, iI_{10}; A \in GL(2,R), B = B^* \in \mathrm{Mat}(2,2;R) \rangle,$$

ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{A}' : &= \left(\sum_{d \in R^2 \text{ with } \bar{b}=\bar{d}} \delta_{b, A^* a} \right)_{\bar{a},\bar{b} \in \mathcal{S}^2}, \\ D'_B : &= \mathrm{diag}(i^{a^* B a} \text{ with } \bar{a} \in \mathcal{S}^2). \end{aligned}$$

後で利用するため, $\tilde{H}$ を H の生成元から iI_{10} を除いた群として定義する. 即ち,

$$\tilde{H} := \langle -\frac{1}{4} T', \tilde{A}', D'_B; A \in GL(2,R), B = B^* \in \mathrm{Mat}(2,2;R) \rangle.$$

命題 6 R 上の任意の *Type II code* C に対して, 対称重み多項式は, 有限群 H の作用により不変である.

次に “構成 A” と呼ばれる構成法の類似を考え、コードから格子を構成する. 自然な射影 $\rho : \mathbf{Z}[i]^2 \longrightarrow R^2$ を考え, $\Delta(C) := \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^{-1}(C)$ とする. この時, 格子 $\Delta(C)$ に対して, テータ関数 $\Theta_{\Delta(C)}(\tau)$ を次で定義する.

$$\Theta_{\Delta(C)}(\tau) := \sum_{x_1,x_2 \in \Delta(C)} \prod_{1 \le j,k \le 2} \exp \pi i x_j^* x_k \tau_{jk}.$$

以上の事柄について, 以下が成り立つ.

定理 7 R 上の長さ n の *Type II code* C に対して, $W(f_a(\tau)) = S(f_{\bar{a}}(\tau)) = \Theta_{\Delta(C)}(\tau)$ は Γ に関する n 次の対称な *Hermitian modular form* となる.

不変式論との関係は [1] で行なうが、とくに, 有限群 H と $\tilde{H}$ の不変式環の次元公式は次で与えられる.

$$
\begin{aligned}
\Phi_H(t) &= (1+2\,t^8+10\,t^{12}+24\,t^{16}+53\,t^{20}+108\,t^{24}+192\,t^{28}+302\,t^{32}+\\
&\quad 420\,t^{36}+506\,t^{40}+540\,t^{44}+527\,t^{48}+452\,t^{52}+330\,t^{56}+206\,t^{60}+108\,t^{64}+\\
&\quad 45\,t^{68}+12\,t^{72}+2\,t^{76})/(1-t^4)^2(1-t^8)^3(1-t^{12})^3(1-t^{20})^2\\
&= (1+t^4)\,(1-t^4+3\,t^8+7\,t^{12}+17\,t^{16}+36\,t^{20}+72\,t^{24}+120\,t^{28}+182\,t^{32}+\\
&\quad 238\,t^{36}+268\,t^{40}+272\,t^{44}+255\,t^{48}+197\,t^{52}+133\,t^{56}+73\,t^{60}+35\,t^{64}+\\
&\quad 10\,t^{68}+2\,t^{72})/(1-t^4)^2(1-t^8)^3(1-t^{12})^3(1-t^{20})^2\\
&= 1+2\,t^4+8\,t^8+27\,t^{12}+82\,t^{16}+237\,t^{20}+\cdots\\
\Phi_{\tilde{H}}(t) &= 1+2\,t^8+t^{10}+10\,t^{12}+8\,t^{14}+21\,t^{16}+17\,t^{18}+42\,t^{20}+34\,t^{22}+71\,t^{24}+\\
&\quad 64\,t^{26}+102\,t^{28}+85\,t^{30}+118\,t^{32}+80\,t^{34}+101\,t^{36}+58\,t^{38}+64\,t^{40}+29\,t^{42}+\\
&\quad 30\,t^{44}+7\,t^{46}+10\,t^{48}+t^{50}+3\,t^{52}+t^{56})/(1-t^4)^2(1-t^6)(1-t^8)^3(1-t^{10})^2(1-t^{12})^2\\
&= (1+t^4)\,(1-t^4+3\,t^8+t^{10}+7\,t^{12}+7\,t^{14}+14\,t^{16}+10\,t^{18}+28\,t^{20}+24\,t^{22}+\\
&\quad 43\,t^{24}+40\,t^{26}+59\,t^{28}+45\,t^{30}+59\,t^{32}+35\,t^{34}+42\,t^{36}+23\,t^{38}+22\,t^{40}+6\,t^{42}+\\
&\quad 8\,t^{44}+t^{46}+2\,t^{48}+t^{52})/(1-t^4)^2(1-t^6)(1-t^8)^3(1-t^{10})^2(1-t^{12})^2\\
&= 1+2\,t^4+t^6+8\,t^8+5\,t^{10}+27\,t^{12}+22\,t^{14}+82\,t^{16}+82\,t^{18}+\cdots
\end{aligned}
$$

ここでの重み多項式, Hermitian modular form 等の議論は種数 2 にあたるものである. 一般種数に関するもの, また詳しい内容は [1] で扱われる.

参考文献

[1] E. Bannai, S. T. Dougherty, M. Harada and M. Oura, in preperation.

[2] E. Freitag, Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlköper, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss. (1967).

[3] K. Matsumoto, Theta functions on the bounded symetric domain of type $I_{2,2}$ and the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces, Math. Ann. 295, 383–409(1993).

[4] S. Nagaoka, A note on the structure of the ring of symmetric Hermitian modular forms of degree 2, J. Math. Soc. Japan, vol **48**, No.3, 525–549 (1996).