Leonard system について

田辺顕一朗
九州大学大学院数理学研究科 tanabe@math.kyushu-u.ac.jp

1 イントロダクション

最近 Terwilliger は Q-polynomial 距離正則グラフの研究に関連して次に紹介する『Leonard system」を定義しました。

定義 1.1 V を $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。$\Phi = (A; V_0, \ldots, V_d; A^*; V_0^*, \ldots, V_{d^*}^*)$ が次の条件を満たす時、Φを Leonard system と呼ぶ。

(1) $A, A^* \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$ で A, A^*はそれぞれ対角化可能である。

(2) $V_0, \ldots, V_d$は A の全ての固有空間を並べたものである。

(3) $V_0^*, \ldots, V_{d^*}^*$は A^*の全ての固有空間を並べたものである。

(4) $AV_i^* \subset V_{i-1}^* + V_i^* + V_{i+1}^*$ $(i = 0, 1, \ldots, d^*)$. $V_{-1}^* = V_{d^*+1}^* := 0$.

(5) $A^*V_i \subset V_{i-1} + V_i + V_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, d)$. $V_{-1} = V_{d^+1} := 0$.

(6) $< A, A^* >$で A と A^*とで生成される $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$ の $\mathbf{C}$-部分代数を表すものとする。V は$< A, A^* >$ −既約加群である。

本質的な条件は (4) (及びその双対的な条件 (5)) です。その意味を少し不正確になりますが、Leonard system を考える動機となったグラフの言葉で述べておきます。今向きのついていない連結グラフΓが与えられたとして、頂点 $x \in \Gamma$を一つ固定します。Γの頂点達は x からの距離によってΓ$_i(x) := \{\ y \in \Gamma \mid \partial(x, y) = i\}$ $(i = 0, 1, 2. \ldots)$ 達に分割されます。ここで、$\partial(x, y)$ は x と y とを結ぶ最短のパスの長さを表します。条件 (4) は、頂点 $y \in \Gamma_i(x)$ に隣接する頂点達はΓ$_{i-1}(x), \Gamma_i(x), \Gamma_{i+1}(x)$ の和集合に含まれているという当り前の事実から来ています。

次に Leonard system を考える動機となった Q-polynomial 距離正則グラフの紹介を少しだけします。まず距離正則グラフの定義をします。

定義 1.2 $\Gamma = (X, E)$ をループ、多重辺を持たない頂点数有限の非有向連結グラフとします。頂点 $x, y \in X$ に対して、$\partial(x, y) :=$ (x と y とを結ぶ最短のパスの長さ) と定義します。Γは次の条件を満たすとき距離正則グラフであると呼ばれます。

$$(\text{条件}) \begin{cases} i, j, k \text{ を任意の非負整数とする。} \partial(x, y) = k \text{ なる任意} \\ \text{の頂点 } x, y \in X \text{ に対して値} \#\{\ z \in X \mid \partial(x, z) = \\ i \text{ かつ } \partial(z, y) = j\ \} \text{ は } x, y \in X \text{ のとり方によらず、} \\ k \text{ にのみ依存する。} \end{cases}$$

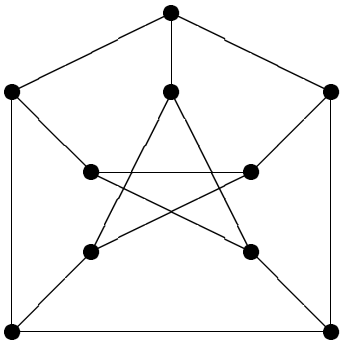
距離正則グラフの例は豊富にありますが、ここで例をいくつか挙げておきます。

例 **1.1** (距離正則グラフの例)

- 自明な例 : 完全グラフ K_n

  頂点集合　: $X := \{1, 2, \ldots, n\}$
  辺集合　　: $\{\ (x, y) \in X \times X \mid x \neq y\ \}$

- Petersen グラフ



- Hamming グラフ $H(q, d)$

  頂点集合　: $X := \{1, 2, \ldots, q\}^d$
  辺集合　　: $\Big\{((x_i)_{i=1}^d, (y_i)_{i=1}^d) \in X \times X \;\Big|\; \#\{i \mid x_i \neq y_i\ \} = 1\Big\}$。

- Jhonson グラフ $J(v, d)$ $(d \leq v/2)$。

  頂点集合　: $X := (\{1, 2, \ldots, v\}$ の d 個の元からなる部分集合の全体)。
  辺集合　　: $\{(x, y) \in X \times X \mid \#(x \cap y) = d - 1\}$。

- Bilinear forms グラフ。

  頂点集合　: $X := \mathrm{Mat}_{d \times n}(GF(q))$ $(d \leq n)$。
  辺集合　　: $\{(x, y) \in X \times X \mid \mathrm{rank}(x - y) = d - 1\}$。

  ここで $GF(q)$ は位数 q の有限体を表すものとする。

- q-アナログ Jhonson グラフ $J_q(v, d)$ $(d \leq v/2)$。

  頂点集合　: $X := (GF(q)$ 上の v 次元ベクトル空間の d 次元部分空間の全体)。
  辺集合　　: $\{(x, y) \in X \times X \mid \dim(x \cap y) = d - 1\}$。

Q-polynomial 距離正則グラフの Q-polynomial とは距離正則グラフの隣接行列の固有値に関する条件なのですが定義が面倒なので省略します。上に挙げた例は全て Q-polynomial 距離正則グラフとなっています。Q-polynomial 距離正則グラフから Terwilliger 代数と呼ばれる有限次元半単純代数が定義できます (定義などは [2] を参照)。この代数は距離正則グラフの研究に有効であることが分かって来ているのですが、その既約表現は Leonard system

となっています。つまり Terwilliger 代数の既約表現の研究のために Leonard system は考えられました。

Leonard system の中で Terwilliger が最初に注目したのは次に紹介する thin と呼ばれる条件を満たすものでした。任意の Q-polynomial 距離正則グラフの Terwilliger 代数は必ず thin となる既約表現を自然に一つ持ちます。

定義 1.3 $\Phi = (A; V_0, \ldots, V_d; A^*; V_0^*, \ldots, V_{d^*}^*)$ を Leonard system とする。任意の $i = 1, 2, \ldots, d^*$ に対して $\dim V_i^* = 1$ が成り立っている時Φは thin であると呼ばれる。また任意の $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して $\dim V_i = 1$ が成り立っている時Φは dual-thin であると呼ばれる。

実は Leonard system Φが thin であることの必要十分条件はΦが dual-thin であることが知られており、また thin Leonard system は Terwilliger によって分類されています。Terwilliger 代数の全ての既約表現が thin となっている Q-polynomial 距離正則グラフはたくさん存在するのですが、thin とは見ての通り既約表現が簡単な構造を持つというかなり強い条件です。実際 non-thin な既約表現を持つ Q-polynomial 距離正則グラフも存在します。したがって non-thin Leonard system を研究し、その構造を知ること (出来れば分類) が我々の研究目標です。

ここで Leonard system の例を幾つか与えておきます。どの例も Q-polynomial 距離正則グラフから来るものです [1]。

例 1.2 (1) • $B, B^* \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbf{C})$ を

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 3d & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3(d-1) & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & \cdots & 0 & d & 2d \end{bmatrix}, \quad B^* := \begin{bmatrix} 3d & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 3d-4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3d-8 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -d \end{bmatrix}$$

とおき、

$$\begin{aligned} V(B)_i &:= \{\ v \in \mathbf{C}^{d+1} \mid Bv = (3d-4i)v\ \}, \\ V(B)_i^* &:= \{\ v \in \mathbf{C}^{d+1} \mid B^*v = (3d-4i)v\ \}. \end{aligned}$$

とおく。この時$\Phi(B) := (B; V(B)_0, \ldots, V(B)_d; B^*; V(B)_0^*, \ldots, V(B)_d^*)$ は thin Leonard system となることが次の様にして分かる。$v_i(j) := \sum_{k \geq 0} \frac{(-i)_k (-j)_k}{(-d)_k\, k!} \left(\frac{4}{3}\right)^k$ とおき、$v_i := (v_i(0), \ldots, v_i(d))^T$ とおく。ここで $(a)_k := a(a+1)\cdots(a+k-1)$ である。

$$\begin{aligned} (3d-4j)v_i(j) &= 3(d-j)v_i(j-1) + 2jv_i(j) + jv_i(j+1), \\ (3d-4i)v_i(j) &= 3(d-i)v_{i-1}(j) + 2iv_i(j) + iv_{i+1}(j), \end{aligned}$$

が成り立つことが初等的な計算で示せる$\Big($$v_i(j)$ は i と j に関して対称なのでどちらかを示せばよい$\Big)$。したがって v_iは固有値 $3d-4i$ に対応する B の固有ベクトルとなり、また

$$B^*v_i = (3d-4i)v_i = 3(d-i)v_{i-1} + 2iv_i + iv_{i+1}.$$

が言えるので Leonard system の (5) の条件が成立することが分かる。(4) の条件は自明に成立する。既約性も簡単に示せる。

- $C, C^* \in \mathrm{Mat}_{p+1}(\mathbf{C})$ を

$$C := \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & -2 & p-1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 6 & -4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 3p & -2p \end{bmatrix}, \quad C^* := \begin{bmatrix} p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & p-4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & p-8 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -3p \end{bmatrix}$$

とおき、

$$\begin{aligned} V(C)_i &:= \{\ v \in \mathbf{C}^{d+1} \mid Cv = (p-4i)v\ \}, \\ V(C)_i^* &:= \{\ v \in \mathbf{C}^{d+1} \mid C^*v = (p-4i)v\ \}. \end{aligned}$$

とおく。この時$\Phi(C) := (C; V(C)_0, \ldots, V(C)_p; C^*; V(C)_0^*, \ldots, V(C)_p^*)$ も前の例と同様にして thin Leonard system となることが分かる。

(2) 例 (1) の$\Phi(B), \Phi(C)$ を用いて thin でない Leonard system を構成します。

$$\begin{aligned} A &:= B \otimes I_{d+1} + I_{p+1} \otimes C, \\ A^* &:= B^* \otimes I_{d+1} + I_{p+1} \otimes C^*, \\ V_i &:= \sum_{j+k=i} V(B)_j \otimes V(C)_k, \\ V_i^* &:= \sum_{j+k=i} V(B)_j^* \otimes V(C)_k^*. \end{aligned}$$

とおく。この時 $(A; V_0, \ldots, V_{d+p}; A^*; V_0^*, \ldots, V_{d+p}^*)$ は Leonard system となる。各固有空間の次元は

$$\dim V_i = \dim V_i^* = \begin{cases} i+1, & \text{if } 0 \le k \le \min\{d,\ p\}, \\ \min\{d,p\}+1, & \text{if } \min\{d,p\} < i \le \max\{d,p\}, \\ d+p+1-i, & \text{if } \max\{d,p\} < i \le d+p. \end{cases}$$

となる。つまり、$m :=\min\{d,p\}$ とおくと、

$$\begin{aligned} &\dim V_0, \dim V_1, \ldots, \dim V_{d+p} \\ &= 1, 2, \ldots, m-1, m, m, \ldots, m, m, m-1, \ldots, 2, 1, \end{aligned}$$

となっている。

Leonard system に関してまず次の問題が Terwilliger によって提起されました。

問題　$\dim V_0, \ldots, \dim V_d, \dim V_0^*, \ldots, \dim V_{d^*}^*$ はどうなっているか ？

今まで知られている (正確には V_i達の次元が計算されている) 全ての Leonard system $\Phi = (A; V_0, \ldots, V_d; A^*; V_0^*, \ldots, V_{d^*}^*)$ に対しては、先程の例にもあったように

- $$d = d^*.$$
- $$(\spadesuit) \begin{cases} \text{ある正の整数 } m \text{ が存在して、} \\ \quad \dim V_0, \quad \dim V_1, \quad \ldots \quad, \dim V_d \\ \quad \dim V_0^*, \quad \dim V_1^*, \quad \ldots \quad, \dim V_d^* \\ = \quad 1, 2, \ldots, m-1, m, m, \ldots, m, m, m-1, \ldots, 2, 1, \\ \quad 1, 2, \ldots, m-1, m, m, \ldots, m, m, m-1, \ldots, 2, 1, \end{cases}$$

という性質が成り立っていました。これを見ると、一般の Leonard system に対してこれらの性質が成り立っていて thin の場合というのは $m = 1$ の場合に対応しているのではないかと期待したくなります。楽観適ですが我々はこのことを割と期待して研究を進めて来ました。最近 Terwilliger によって、次の大きな結果が得られました。

定理 1.1 (Terwilliger, 1997)　$\Phi = (A; V_0, \ldots, V_d; A^*; V_0^*, \ldots, V_{d^*}^*)$ を Leonard system とする。この時、

(1) $d = d^*$.

(2) $\dim V_i = \dim V_{d-i} = \dim V_i^* = \dim V_{d-i}^*$ $(i = 0, 1, \ldots, d)$. この値を m_iとおく。

(3) $m_0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_{\lfloor d/2 \rfloor}$. ここで $\lfloor d/2 \rfloor := \min\{a \in \mathbf{Z} \mid a \leq d/2\}$。

が成り立つ。

この結果をもとに筆者は $d = 2, 3$ に関する Leonard system を研究しました。その結果を次に報告します。($d = 1$ の時は Leonard system は全て thin となることが分かっています。)

2　$d = 2, 3$ の Leonard system について

定理 2.1 ($d = 2$ の場合)　$(A; V_0, V_1, V_2; A^*; V_0^*, V_1^*, V_2^*)$ を Leonard system とする。この時、$\dim V_0 = \dim V_2 = 1,\ \dim V_1 \leq 2$ である。以下 $\dim V_1 = 2$ と仮定する。この時 A, A^* は適

当な基底を用いて、

$$(\diamondsuit)\begin{cases} A=\begin{bmatrix} \theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & \nu & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad A^*=\begin{bmatrix} \theta_0^* & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & \theta_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_2^* \end{bmatrix}, \\ \text{where} \\ \lambda,\mu,\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_0^*,\theta_1^*,\theta_2^* \in \mathbf{C}, \\ \nu := \lambda+\theta_0\theta_0^*-\theta_0\theta_1^*-\theta_1\theta_0^*+\theta_1\theta_2^*+\theta_2\theta_1^*-\theta_2\theta_2^*, \\ \mu\neq 0,\ \lambda\nu\neq\mu, \\ \theta_i\neq\theta_j,\ \theta_i^*\neq\theta_j^*\ (i\neq j). \end{cases}$$

と書ける。逆に条件 $(\diamondsuit)$ を満たす行列 A, A^*が与えられた時、$V_i = \{\ v \in \mathbf{C}^4 \mid Av = \theta_i v\ \},\ V_i^* = \{\ v \in \mathbf{C}^4 \mid A^*v = \theta_i^* v\ \}\ (i = 0, 1, , 2)$ とおくと、$(A; V_0, V_1, V_2; A^*; V_0^*, V_1^*, V_2^*)$ は Leonard system となる。

定理 2.2 $(d = 3$ の場合$)$ $(A; V_0, V_1, V_2, V_3; A^*; V_0^*, V_1^*, V_2^*, V_3^*)$ を Leonard system とする。この時 $\dim V_0 = \dim V_3 = 1,\ \dim V_1 = \dim V_2 \leq 3$ が成り立つ。

ここで条件 $(\spadesuit)$ が成り立つかどうかが興味があるわけですが、以下のような $\dim V_0 = \dim V_3 = 1,\ \dim V_1 = \dim V_2 = 3$ を持つ Leonard system が構成できました。つまり一般には条件 $(\spadesuit)$ は成り立たないことが分かりました。

例 2.1 複素数 a, b, c を

$$\begin{aligned} 36+36a+b+c &\neq 0 \\ -a^2b^2+b^3+\frac{16}{9}a^3c-2abc+\frac{c^2}{3} &\neq 0 \\ 9a^2b^2-9b^3-16a^3c+18abc-3c^2 &\neq 0 \\ c &\neq 0 \end{aligned}$$

を満たすようにとる。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4a/3 & b & 3 \end{bmatrix}, \quad A^*=\begin{bmatrix} 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} V_i & := & \{v \in \mathbf{C}^8 \mid Av = iv\ \}, \\ V_i^* & := & \{v \in \mathbf{C}^8 \mid A^*v = iv\ \}, \end{array} \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

とおく。この時、$(A; V_0, V_1, V_2, V_3; A^*; V_0^*, V_1^*, V_2^*, V_3^*)$ は Leonard system となる。また

$$\dim V_0 = \dim V_3 = 1,\ \dim V_1 = \dim V_2 = 3.$$

が成り立つ。したがってこの Leonard system は条件 (♠) を満たしていません。

参考文献

[1] K. Tanabe, "The irreducible modules of the Terwilliger algebras of Doob schemes, " *Journal of Algebraic Combinatorics* **6**, 173–195 (1997).

[2] P. Terwilliger, "The subconstituent algebra of an association scheme, "
(Part I), *Journal of Algebraic Combinatorics* **1**, 363–388 (1992).
(Part Ⅱ), *Journal of Algebraic Combinatorics* **2**, 73-103 (1993).
(Part Ⅲ), *Journal of Algebraic Combinatorics* **2**, 177-210 (1993).