楕円 $K3$ 曲面について

北海道大学大学院理学研究科　　島田　伊知朗

1　Introduction

楕円 $K3$ 曲面の特異ファイバーの configuration と Mordell-Weil 群をすべて列挙する．$K3$ 曲面および楕円曲面の基礎的な事項について復習したあと，得られたリストから見て取れるいくつかの結果を紹介し，最後にこのリストを得るためのアルゴリズムの概要を示す．

アルゴリズムの基礎となるのは，楕円 $K3$ 曲面を Hodge 構造により特徴づける金銅-西山の補題（定理 6.1) と，Nikulin による discriminant form の理論である．この 2 つの理論により，楕円 $K3$ 曲面の問題が，格子と有限アーベル群の問題に帰着される．このアルゴリズムを Maple を使用して書き，求めるリストを得た．

楕円 $K3$ 曲面の特異ファイバーの

式みられている

([12], [10]) が，いずれも extremal な楕円 $K3$ 曲面の場合にとどまっていた．一方，Nikulin の discriminant form の理論を，Torelli の定理を通して $K3$ 曲面の幾何学に応用する仕事としては，平面 6 次曲線の特異点の configuration をすべて調べた Yang [11] の結果がある．

2　$K3$ 曲面

単連結でいたるところゼロでない正則 2 形式をもつ複素曲面を $K3$ 曲面という．$K3$ 曲面は，アーベル曲面とともに，楕円曲線の曲面への一般化とみることができる．$K3$ 曲面の諸性質をまとめておこう．証明は例えば [1] を参照されたい．

定理 2.1 $K3$ 曲面は Kähler である．□

定理 2.2 $K3$ 曲面全体は連結な族をなす．□

系 2.3 任意の 2 つの $K3$ 曲面は微分同相である．□

定理 2.4 X を $K3$ 曲面とする．

(1)$H^1(X;\mathbb{Z}) = H^3(X;\mathbb{Z}) = 0$.

(2)$H^2(X;\mathbb{Z})$ はランク 22 の自由 $\mathbb{Z}$ 加群.

(3) カップ積 $H^2(X;\mathbb{Z}) \times H^2(X;\mathbb{Z}) \to H^4(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ により，$H^2(X;\mathbb{Z})$ を格子とみると，$U^{\oplus 3} \oplus (-E_8)^{\oplus 2}$ と同型．ここで U は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を交叉行列とする格子，$-E_8$ は負定符号 E_8 ルート格子，つまり

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

を交叉行列とする格子.

(4)$\dim H^{2,0}(X;\mathbb{C}) = \dim H^{0,2}(X;\mathbb{C}) = 1, \dim H^{1,1}(X;\mathbb{C}) = 20$.

(5)

$$H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) := H^{1,1}(X;\mathbb{C}) \cap H^2(X;\mathbb{R})$$

$$H^{0,2+2,0}_{\mathbb{R}}(X) := (H^{2,0}(X;\mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X;\mathbb{C})) \cap H^2(X;\mathbb{R})$$

とおくと $H^2(X;\mathbb{R})$ は $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \oplus H^{0,2+2,0}_{\mathbb{R}}(X)$ と直交直和分解し，カップ積は，$H^{0,2+2,0}_{\mathbb{R}}(X)$ の上で正定値となる． □

$\Lambda := U^{\oplus 3} \oplus (-E_8)^{\oplus 2}$ を $K3$ 格子とよぶ．これは，符号が (3, 19) の unimodular な偶格子（すべての元のノルムが偶数である格子）として，unique に特徴づけられる [8].

3 Torelli の定理

$K3$ 曲面の研究で中心的な役割をはたすのが次の Torelli 型定理である．この定理により，$K3$ 曲面の幾何学的問題の多くが格子の問題に翻訳される．

定理 3.1 (1)X, X' を $K3$ 曲面とする．$\mathbb{Z}$ 加群としての同型 $\varphi : H^2(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X';\mathbb{Z})$ でカップ積を保ち，$\varphi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ が Hodge 分解を保つものが存在すれば，X と X' は同型である．
(2)$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の正定値な 2 次元部分空間 P が与えられたとき，ある $K3$ 曲面 X と，格子としての同型 $\alpha : H^2(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda$ で $\alpha_{\mathbb{R}}(H^{0,2+2,0}_{\mathbb{R}}(X)) = P$ なるものが存在する． □

この定理の証明の歴史が [1] に簡単に書かれている．

4 楕円曲面の Mordell-Weil 群と特異ファイバーの ADE-型

複素曲面

表 1: 特異ファイバーの ADE 型

fiber	I_{l+1}	I^*_{m-4}	II	II^*	III	III^*	IV	IV^*
ADE 型	A_l	D_m	既約					

また，Σ のオイラー数を

$$\mathrm{euler}(\Sigma) := \sum_{l\geq 1} a_l \cdot (l+1) + \sum_{m\geq 4} d_m \cdot (m+2) + \sum_{6\leq n\leq 8} e_n \cdot (n+2).$$

と定義する．これは，楕円曲面 $f : X \to C$ にたいして，可約なファイバーの和集合 $f^{-1}(R_f)$ の位相的オイラー数が常に $\mathrm{euler}(\Sigma_f)$ 以上であるように定義されている．

$f : X \to \mathbb{P}^1$ が楕円 $K3$ 曲面なら，X の Picard 格子 $H^{1,1}(X;\mathbb{Z}) := H^{1,1}(X;\mathbb{C}) \cap H^2(X;\mathbb{Z})$ は $f^{-1}(R_f)$ の O と交わらない既約成分のコホモロジー類で生成される $L(\Sigma_f)$ と同型な格子 S_f と，O および $f : X \to \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーで生成される U と同型な格子 H_f の直和 $S_f \oplus H_f$ を含む．$\dim H^{1,1}(X;\mathbb{C}) \leq 20$ より $\mathrm{rank}(\Sigma_f) = \mathrm{rank}\, S_f \leq 18$ である．また X の位相的オイラー数 24 は $f^{-1}(R_f)$ の位相的オイラー数以上である．したがって，次を得る．

命題 5.1 $f : X \to \mathbb{P}^1$ を楕円 $K3$ 曲面とすると，$\mathrm{rank}(\Sigma_f) \leq 18$ および $\mathrm{euler}(\Sigma_f) \leq 24$ が成立する． $\square$

を $\mathrm{rank}(\Sigma) \leq 18$ および $\mathrm{euler}(\Sigma) \leq 24$ をみたす形式的 ADE-型の集合とする．この集合は 3937 個のメンバーを持つ．

リスト $\mathcal{P}$ を見ることで，次の諸結果を得る．

定理 5.2 (1)　のうち，3279 個が楕円 $K3$ 曲面の特異ファイバーの ADE-型として現れる．

(2)$\Sigma \in$　が $\mathrm{rank}(\Sigma) < 14$ をみたせば，$\Sigma = \Sigma_f$ なる楕円 $K3$ 曲面 $f : X \to \mathbb{P}^1$ が存在する．

(3)$\Sigma \in$　が $\mathrm{rank}(\Sigma) = 14$ をみたせば，$\Sigma \models E_6 + 8A_1$ のときおよびそのときに限り，$\Sigma = \Sigma_f$ なる楕円 $K3$ 曲面 $f : X \to \mathbb{P}^1$ が存在する． $\square$

定理 5.3 (1)$\Sigma \in$　が $\mathrm{rank}(\Sigma) < 11$ をみたせば，$\Sigma = \Sigma_f$ なる楕円 $K3$ 曲面 $f : X \to \mathbb{P}^1$ で $TMW_f = (0)$ なるものが存在する．

(2)$\Sigma \in$　哕X

定理 5.5 楕円 $K3$ 曲面 $f : X \to \mathbb{P}^1$ の Mordell-Weil 群のねじれ部分群 TMW_f はつぎのいずれかと同型である．これらの群のどれもが，楕円 $K3$ 曲面の Mordell-Weil 群のねじれ部分群として現れる．

$$
\begin{gathered}
(0), \\
\mathbb{Z}/(2), \quad \mathbb{Z}/(3), \quad \mathbb{Z}/(4), \quad \mathbb{Z}/(5), \quad \mathbb{Z}/(6), \quad \mathbb{Z}/(7), \quad \mathbb{Z}/(8), \\
\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2), \quad \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2), \quad \mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(2), \\
\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3), \quad \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4).
\end{gathered}
$$

□

TMW_f の位数が大きいとき，$f : X \to \mathbb{P}^1$ は Σ_f により特徴付けられる．

定理 5.6 $f : X \to \mathbb{P}^1$ を楕円 $K3$ 曲面とする．

$\subset$ $TMW_f \cong \mathbb{Z}/(7)$ $\langle\ \rangle$ $\Sigma_f = 3A_6$

$\subset$ $TMW_f \cong \mathbb{Z}/(8)$ $\langle\ \rangle$ $\Sigma_f = 2A_7 + A_3 + A_1$

$\subset$ $TMW_f \cong \mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(2)$ $\langle\ \rangle$ $\Sigma_f = 3A_5 + 3A_1$

$\subset$ $TMW_f \cong \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)$ $\langle\ \rangle$ $\Sigma_f = 6A_3$ □

6 アルゴリズムの概要

まず楕円 $K3$ 曲面の存在とその性質を Torelli の定理を使って格子の言葉に翻訳する．この仕事は，金銅 [4, Lemma 2.1] と西山 [7, Lemma 6.1] によりすでになされている．

偶格子 L の双対格子を $L^\vee$ で表す．$L^\vee$ は $\mathbb{Q}$ に値をもつ自然な双線形形式をもつ．格子 M が L を指数有限の部分格子として含むならば，M は $L^\vee$ の L を含む部分格子として埋め込めることに注意する．$L^\vee$

表 2: Number of roots

Typeτ	A_l	D_m	E_6	E_7	E_8
roots($L(\tau)$)	$l(l+1)$	$2m(m-1)$	72	126	240

(ii)$M/L(\Sigma) \cong H$.

(iii)roots(M) = roots($L(\Sigma)$).

(iv)$M \oplus U \oplus N$ は $K3$ 格子 Λ と同型な overlattice をもち，この overlattice のなかで M および N は primitive である. □

M の符号は $(0, \mathrm{rank}(\Sigma))$ であり，N の符号は $(2, 18 - \mathrm{rank}(\Sigma))$ であることに注意する.

うめこみ $M \oplus U \oplus N \to \Lambda$ において，M は S_f 　 $H^{1,1}(X;\mathbb{Z})$ の primitive closure に対応し，U は H_f に対応し，N は $(S_f \oplus H_f)^{\perp}$ 　 $H^2(X;\mathbb{Z})$ に対応する.

U が unimodular であること，および $U^{\oplus 2} \oplus (-E_8)^{\oplus 2}$ が符号 $(2, 18)$ の unique な unimodular 偶格子であることをもちいると，条件 (iv) は次の条件に書き換えられる.

(iv)′ $M \oplus N$ は unimodular な符号 $(2, 18)$ の偶格子のなかに指数有限の部分格子として M および N が primitive となるように埋め込める.

与えられた条件をみたす偶格子 M

表 3: Discriminant forms of root lattices

τ	$D_{L(\tau)}$	$q_{L(\tau)}$
A_l	$\langle \bar{a}_l^* \rangle \cong \mathbb{Z}/(l+1)$	$(l/(l+1))$
$D_m (m : \text{even})$	$\langle \bar{d}_1^* \rangle \times \langle \bar{d}_m^* \rangle \cong (\mathbb{Z}/(2))^{\oplus 2}$	$\begin{pmatrix} m/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$
$D_m (m : \text{odd})$	$\langle \bar{d}_1^* \rangle \cong \mathbb{Z}/(4)$	$(m/4)$
E_6	$\langle \bar{e}_6^* \rangle \cong \mathbb{Z}/(3)$	$(4/3)$
E_7	$\langle \bar{e}_7^* \rangle \cong \mathbb{Z}/(2)$	$(3/2)$
E_8	(0)	(0)

表 4: Discriminant forms of lattices over$\mathbb{Z}_p$

Γ	$p^\nu (a)$	$2^\nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$2^\nu \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
D_Γ	$\mathbb{Z}/(p^\nu)$	$(\mathbb{Z}/(2^\nu))^{\oplus 2}$	$(\mathbb{Z}/(2^\nu))^{\oplus 2}$
q_Γ	$\left(\dfrac{a}{p^\nu}\right)$	$\dfrac{1}{2^\nu} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\dfrac{1}{2^\nu} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

命題 6.4 $|D_M| = |\mathrm{disc}(M)|$の素因子の集合を P_M とする．discriminant form(D_M, q_M) は，p-part$(D_M^{(p)}, q_M^{(p)})$ の直和に直交分解する：

$$(D_M, q_M) = \bigoplus_{p \in P_M} (D_M^{(p)}, q_M^{(p)}).$$

さらに，各 $(D^{(p)}$ $

これらの格子の discriminant form は表 4 から得られる．したがって，可換な p-群上の 2 次形式 (D_p, q_p) とランク n が与えられたとき，(D_p, q_p) を discriminant form にもつランク n の $\mathbb{Z}_p$ 格子をすべて列挙することができる．

discriminant$d$, 符号 (r, s), および d の各素因子 p におけるランク $r + s$ の $\mathbb{Z}_p$ <

[2] J. W. S. Cassels. Rational quadratic forms. Academic Press, London, 1978.

[3] J. H. Conway and N. J. A. Sloane.Sphere packings, lattices and groups. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **290**, Springer, New York, 1993.

[4] S. Kondō. Automorphisms of algebraic $K3$ surfaces which act trivially on Picard groups. J. Math. Soc. Japan, **44** (1992), no. 1, 75–98.

[5] R. Miranda and U. Persson. Mordell-Weil groups of extremal elliptic $K3$ surfaces. Problems in the theory of surfaces and their classification (Cortona, 1988), Sympos. Math., XXXII, Academic Press, London, 1991, pp. 167–192.

[6] V. V. Nikulin. Integer symmetric bilinear forms and some of their applications. Math. USSR Izvestija **14** (1980), no. 1, 103–167.

[7] K. Nishiyama. The Jacobian fibrations on some $K3$ surfaces and their Mordell-Weil groups. Japan. J. Math. (N.S.) **22** (1996), no. 2, 293–347.

[8] J.-P. Serre. A course in arithmetic. Graduate Texts in Mathematics, **7**, Springer, New York, 1973.

[9] I. Shimada. On elliptic $K3$ surfaces. preprint.

[10] I. Shimada, D. Q. Zhang. Classification of extremal elliptic $K3$ surfaces and fundamental groups of open $K3$ surfaces. preprint.

[11] J.-G. Yang. Sextic curves with simple singularities. Tôhoku Math. J. **48** (1996), no. 2, 203-227.

[12] Q. Ye. On extremal elliptic $K3$ surfaces. preprint. http://xxx.lanl.gov/abs/math.AG, 9901081

060-0081 札幌市北区北１０条西６丁目
shimada@math.sci.hokudai.ac.jp